Red Matemática Antioquia

Geometría Euclidiana

Guías de clase para 45 lecciones

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Sociedad Colombiana de Matemáticas

Antioquia la más educada

GEOMETRÍA EUCLIDIANA
Guías de clase para 45 lecciones

Autoras

Beatriz Elena Correa Restrepo

Luz Elena Muñoz Sierra

Celia Villegas de Arias

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Lección **Página**

1 Puntos y rectas **1**
Introducción . . . 1
Punto, recta y plano . . . 2

2 Semirrectas y segmentos de recta
Medida y congruencia de segmentos de recta **7**
Semirrecta, segmento de recta . . . 7
Medida de segmentos . . . 8
Congruencia de segmentos . . . 11

3 Punto medio de un segmento
Operaciones con segmentos de recta **15**
Punto medio de un segmento . . . 15
Operaciones con segmentos de una misma recta . . . 17

4 Operaciones con segmentos de recta
Ejercicios **23**

5 Planos **29**
Posiciones relativas de dos planos . . . 31
Posiciones relativas de una recta y un plano . . . 32

6 Ángulos. Medida de ángulos **35**
Medida de ángulos . . . 35

7 Congruencia de ángulos. Bisectriz de un ángulo **43**
Congruencia de ángulos . . . 43
Bisectriz de un ángulo . . . 46

8 Operaciones con ángulos **51**
Suma de ángulos . . . 51
Resta de ángulos . . . 52
Producto de un ángulo por un número real positivo . . . 53

9 Clasificación de ángulos **59**

10 Ángulos complementarios y suplementarios **65**

11 Otros tipos de ángulos **71**

Página

12 Rectas perpendiculares **79**
Distancia de un punto a una recta 80
Mediatriz de un segmento 81

13 Rectas paralelas
Ángulos formados por rectas cortadas por una secante **87**
Rectas paralelas 87
Ángulos formados por rectas cortadas por una secante 89

14 Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante **93**

15 Triángulos
Ángulos interiores de un triángulo **101**

16 Ángulos exteriores de un triángulo **109**

17 Clasificación de triángulos **117**

18 Construcción de triángulos **125**

19 Congruencia de triángulos **133**
Primer criterio de congruencia de triángulos 134

20 Otros criterios de congruencia de triángulos **141**
Segundo criterio de congruencia de triángulos 141
Tercer criterio de congruencia de triángulos 144

21 Rectas en el triángulo
Alturas y Mediatrices **149**
Alturas 149
Mediatrices 151

22 Rectas en el triángulo
Medianas y bisectrices **157**
Medianas 157
Bisectrices 159

23 Segmentos congruentes entre paralelas
Proporcionalidad de segmentos **165**

24 Teorema de Tales **171**

25 Semejanza de triángulos **179**
Primer criterio de semejanza de triángulos 180

26 Otros criterios de semejanza de triángulos **187**

Segundo criterio de semejanza de triángulos 187
Tercer criterio de semejanza de triángulos 189

27 Semejanza de triángulos
Problemas **193**

28 Semejanza de triángulos
Otros problemas **201**

29 Polígonos **209**

30 Ángulos y diagonales de un polígono **217**

31 Cuadriláteros **225**

32 Otras propiedades de los paralelogramos **233**
¿Cómo construir un paralelogramo si nos dan información sobre las diagonales? 237

33 Algunos paralelogramos especiales **241**

34 Trapecio **249**

35 Área y perímetro de polígonos **257**
Área y perímetro del rectángulo 259
Área y perímetro del cuadrado 259
Área y perímetro del paralelogramo 261

36 Área y perímetro de triángulos, rombos y trapecios **265**
Área y perímetro del triángulo 265
Área y perímetro del rombo 267
Área y perímetro del trapecio 268

37 Teorema de Pitágoras **271**
Ilustración gráfica del Teorema de Pitágoras 273

38 Teorema de Pitágoras
Aplicaciones **279**

39 Teorema de Pitágoras
Otras aplicaciones **285**

40 Circunferencia **291**
Posiciones relativas de un punto y una circunferencia 292

41 Ángulos en la circunferencia **297**

42 Otros ángulos en la circunferencia **305**
Posiciones relativas de dos circunferencias 308

43 Polígonos inscritos y circunscritos **313**

44 Longitud de una circunferencia
Círculo y área de un círculo **321**

45 Sector circular, segmento circular y corona circular **329**

Bibliografía **339**

Prefacio

Uno de los objetivos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (SCM) es el mejoramiento de la enseñanza y la difusión de las Matemáticas en nuestro medio. Teniendo presente este objetivo, la Gobernación de Antioquia invitó a la SCM a diseñar un plan de trabajo para mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el departamento de Antioquia. Las razones de esta invitación se ven reflejadas en los resultados en el área de Matemáticas de las pruebas SABER (mayo de 2012) y de los exámenes de admisión de la Universidad de Antioquia (mayo de 2012), y en los resultados de la Prueba de Matemáticas de Antioquia (Olimpiadas del Conocimiento, julio de 2012): la nota promedio en Matemáticas, después de estos tres exámenes, fue de 1.9 sobre 5.

Con el fin de enfrentar el problema del bajo nivel matemático de los estudiantes de los últimos grados de la educación secundaria en el departamento de Antioquia, la SCM diseñó el "Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en las instituciones educativas de Antioquia". Este texto, que llega hoy a sus manos, es uno de los muchos productos que el Plan quiere entregarle a Antioquia y hace parte de una colección de cinco textos dedicados a guías de clase, en las áreas de Precálculo, Álgebra, Aritmética, Trigonometría-Geometría Analítica y Gemetría Euclidiana. Los textos de la colección fueron escritos para ayudarles a los maestros en la preparación de sus clases.

Las Matemáticas son como un edificio. Para que el edificio se sostenga firmemente es necesario que tenga buenas bases. Los conceptos elementales que se recogen en los textos de esta colección son sólo una parte de las bases que debe haber construido, con ayuda de sus maestros, un alumno de secundaria que aspire a entrar a la Universidad. Se observará que en ellos se ha tratado de describir en detalle los pasos a seguir en cada tema, ejercicio o problema propuesto. Pensamos, basados en nuestra propia experiencia, que ésta es una buena manera de dictar una clase de Matemáticas. Volviendo a la analogía inicial, así como un muro del edificio se construye poco a poco colocando cada uno de los ladrillos que lo componen, la solución de un ejercicio o problema matemático es una sucesión ordenada de pasos lógicos y coherentes. Si en la construcción del muro faltan ladrillos o hay ladrillos mal colocados es muy posible que el muro se derrumbe. Si en la solución de un problema matemático los pasos están mal concatenados o faltan pasos, probablemente la solución sea incorrecta.

Así como un deportista debe dedicar muchas horas diarias a su entrenamiento, para poder soñar con triunfar, si queremos mejorar nuestra comprensión de las Matemáticas es necesario hacer muchos ejercicios, que aunque a veces parezcan repetidos siempre nos estarán ayudando a enfrentar con mayor lucidez la construcción del edificio de las Matemáticas.

Finalmente es importante señalar que estos textos no pretenden ser un tratado de Pedagogía. Más bien constituyen un conjunto articulado de conocimientos matemáticos que un docente de secundaria puede enseñar de manera efectiva con el uso de los saberes pedagógicos adquiridos en su formación académica. Responden entonces estos textos a nuestra convicción de que si se quiere enseñar bien algo no son suficientes ni las estrategias pedagógicas utilizadas ni el uso de las nuevas tecnologías informáticas, es indispensable tener previamente un conocimiento sólido de la materia que queremos enseñar.

Carlos Montenegro
Presidente, Sociedad Colombiana de Matemáticas

Prólogo

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos básicos tienen cierto grado de complejidad y en consecuencia es crucial que los textos matemáticos que se escriban para apoyar el proceso de su enseñanza y aprendizaje usen un lenguaje claro que concentre su atención en los aspectos realmente importantes de estos conceptos y facilite su comprensión.

El presente texto, que será distribuido en forma gratuita por la gobernación de Antioquia, es un conjunto de guías de clase en Geometría Euclidiana para los maestros de la educación secundaria del Departamento de Antioquia, dentro del programa "Antioquia la más Educada", liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama. Consideramos que estas guías constituyen una síntesis del material que es indispensable presentar en el aula de clase por parte del maestro. De allí que la exposición hecha en ellas de las nociones de matemáticas básicas, que deben ser del conocimiento de todo bachiller antes de su ingreso a la universidad, sea lo mas clara posible. Para alcanzar este objetivo hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. Insistimos en que la función principal de este material es, de una parte, ayudarle al docente en su tarea cotidiana de preparación de clases, y de otra, brindarle al estudiante un resumen de los conocimientos mínimos que debe tener sobre la materia. Es por ello que en lugar de hablar de libro o de texto hemos preferido usar la palabra "guías" para referirnos a este material. En la bibliografía los lectores encontrarán libros y textos que les permitirán complementar el conocimiento básico que les brindan estas guías. Los ejemplos que se resuelven han sido elaborados de manera detallada y cuidadosa, siendo algunos de ellos inspirados en los libros que se referencian en la bibliografía. Finalmente tenemos la esperanza que las guías de clase, que hoy ponemos a consideración de los lectores, mejoren su percepción de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Introducción

Después de escribir las nociones sobre principios básicos de Geometría Euclidiana plana en 20 lecciones, según el compromiso adquirido antes, nos dimos a la tarea de completar el texto en forma detallada, incluyendo más teoremas con su demostración, una serie de ejemplos resueltos para afianzar la teoría y problemas propuestos con respuestas para que el lector pruebe los conocimientos adquiridos.

Pensamos que este texto será de gran utilidad para los docentes y una guía para los estudiantes, sobre todo para aquellos que gustan de una disciplina que ayuda a desarrollar un pensamiento deductivo y lógico, muy necesario en la educación básica y superior.

Agradecemos a la Gobernación de Antioquia, con su programa "Antioquia la más Educada", a todos nuestros colaboradores y a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín por la confianza en nosotras depositada y esperamos poder contribuir con este grano de arena, para que nuestros jóvenes cumplan sus metas, adquiriendo una educación de calidad.

Las autoras

Lección 1

Puntos y rectas

En esta lección explicaremos cómo se trabaja en geometría y cuáles son los instrumentos básicos para hacer construcciones geométricas. Luego, representaremos gráficamente los términos no definidos de punto, recta y plano y veremos algunas de sus propiedades.

Introducción

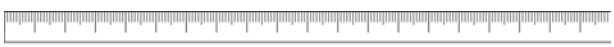
En este curso vamos a trabajar, como en la mayoría de los textos de geometría, con:

1. Ciertos términos básicos que no los definimos y se dan por entendidos.
2. Otros términos que se definen a partir de los básicos.
3. Ciertos principios básicos que no demostramos, que suponemos como ciertos y que se conocen como **postulados** o **axiomas**.
4. Unos resultados que pueden demostrarse en forma lógica a partir de los términos básicos, las definiciones y los axiomas, los cuales se conocen como **teoremas**.

Es importante aclarar que algunos de los resultados que aparecen en este texto como axiomas, pueden aparecer como teoremas en otros textos, porque éstos pueden estar considerando otro sistema de definiciones o axiomas, con los que es factible demostrarlos. También aclaramos que por la extensión del texto hemos dejado sin demostrar muchos teoremas, criterios o proposiciones. Al final de cada lección listaremos los no demostrados y el lector puede hacer el ejercicio de probarlos.

Además haremos algunas construcciones geométricas para lo cual requerimos los instrumentos útiles en el trabajo en geometría que se muestran en la Figura 1.1. Los más usados son la **regla** que sirve para trazar líneas rectas y el **compás** para trazar circunferencias.

Utilizaremos la regla graduada dividida en centímetros y milímetros, para medir distancias y el transportador para medir ángulos. Las escuadras sirven para trazar ángulos rectos, ángulos de 45° y ángulos de 30° y de 60°.



Regla

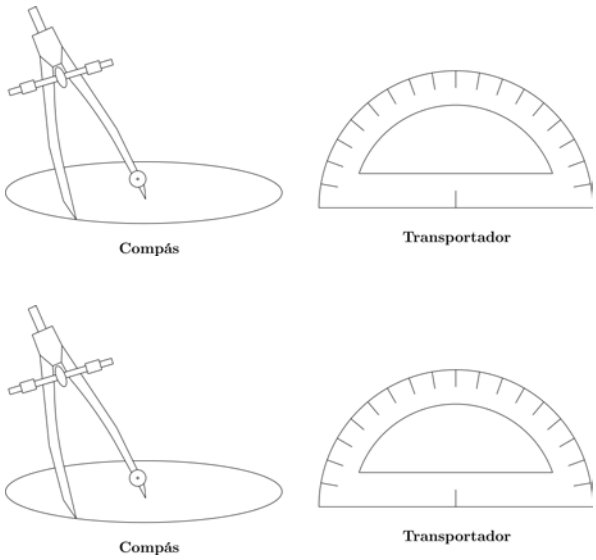
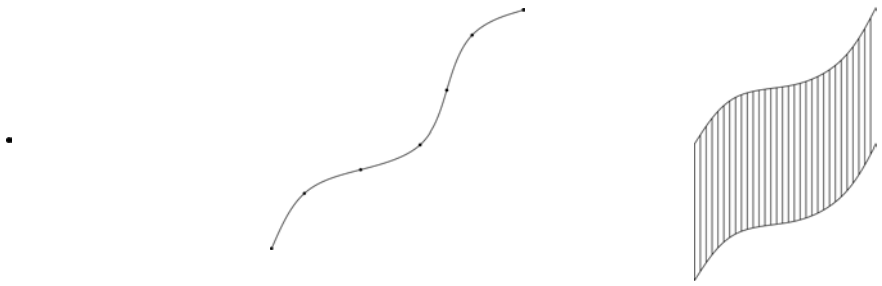


Figura 1.1

Punto, recta y plano

Los conceptos de **punto**, **línea** y **plano** son los elementos básicos de la geometría, a partir de los cuales se construye toda la estructura geométrica y no se definen, se aceptan intuitivamente. A medida que vamos presentando axiomas y probando o enunciando teoremas, estos elementos básicos de la geometría irán adquiriendo sus propiedades, lo cual nos irá ampliando el entendimiento de ellos.

Aunque estos conceptos no los definimos, los representamos por medio de dibujos. Así, un punto lo podemos asociar con la huella que deja el lápiz en el papel; una línea se asocia con la huella que deja un punto en movimiento y un plano lo podemos asociar con la superficie de un piso o de un espejo de tamaño infinito.



Punto Línea Plano

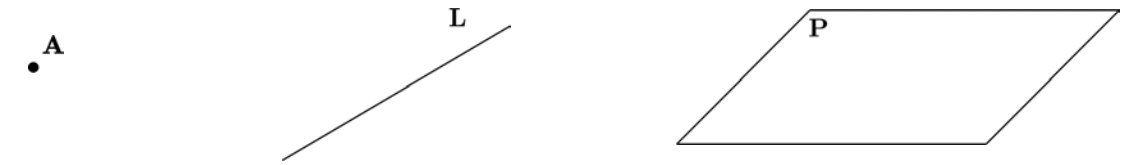
Figura 1.2

Algunas líneas son la línea recta y la línea curva.

Línea recta Línea curva

Figura 1.3

Vamos a trabajar aquí con puntos, líneas rectas y planos. Éstos los representaremos así:



Punto Recta Plano

Figura 1.4

En la Figura 1.4 nos referimos al punto A, a la recta L y al plano P. En general, los puntos, rectas y planos se denotan por letras mayúsculas, aunque también es usual denotar las rectas con letras minúsculas.

Dada una línea recta L y dos puntos distintos A y B sobre ella, podemos hablar también de la recta AB.

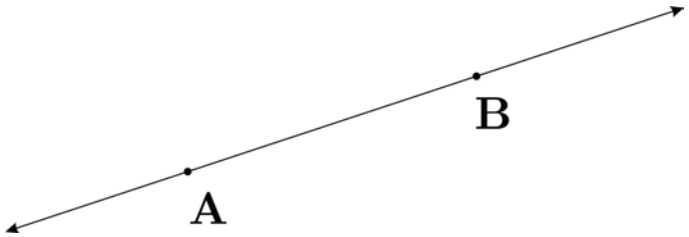


Figura 1.5

Las flechas en los extremos indican que la recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Mediante los axiomas siguientes enunciamos dos propiedades muy importantes que involucran puntos y líneas rectas.

Axioma 1.1

Por dos puntos distintos pasa una única línea recta que los contiene, es decir, dos puntos distintos determinan una única línea recta.

Axioma 1.2

Dos líneas rectas distintas en un plano tienen a lo más un punto en común.

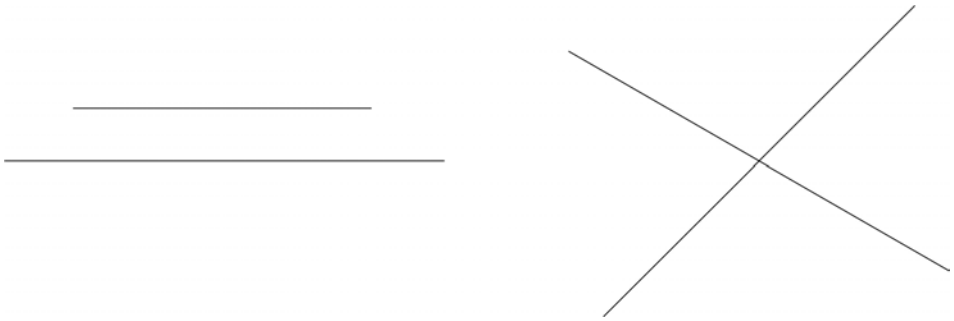


Figura 1.6

En otras palabras, dos rectas distintas en un mismo plano no tienen puntos comunes o tienen un único punto en común.

Cuando tres o más puntos están sobre una misma línea recta decimos que son **colineales**. Por ejemplo, los puntos A, B y C de la Figura 1.7 son colineales, pero los puntos A, B y D no lo son.

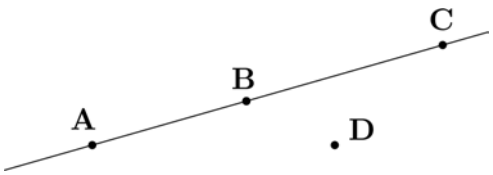


Figura 1.7

Ejemplo 1.1

En la Figura 1.8,

1. Nombrar cuatro grupos de 3 puntos que sean colineales.
2. Nombrar al menos tres grupos de 3 puntos no colineales.
3. Nombrar dos grupos de 4 puntos entre los cuales no haya 3 que sean colineales.

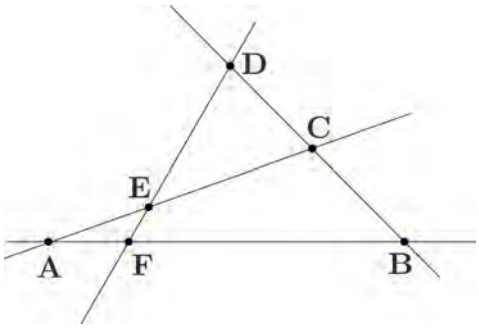


Figura 1.8

Solución

1. A, E y C son colineales; A, F y B son colineales; F, E y D son colineales y B, C y D son colineales.
2. A, F y E son tres puntos no colineales; E, D y C son tres puntos no colineales y F, E y C son tres puntos no colineales.
3. A, E B y D son cuatro puntos de los cuales no hay tres colineales; A, F, C y D son cuatro puntos de los cuales no hay tres colineales

Ejemplo 1.2

En la Figura 1.9 nombrar todos los grupos de tres puntos que sean colineales.

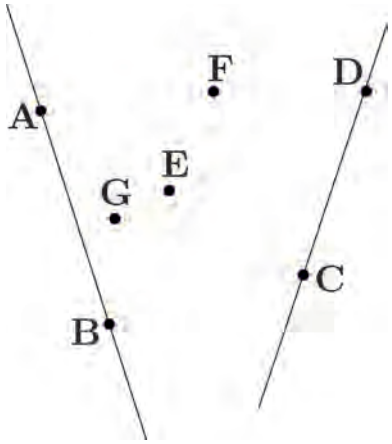


Figura 1.9

Solución

Usando una regla encontramos que A, E y C son tres puntos colineales; G, D y E son tres puntos colineales y B, E y F son tres puntos colineales.

Ejercicios propuestos

1. En cada literal contestar la pregunta, justificando la respuesta.
   (a) ¿Cuántas líneas rectas pasan por dos puntos distintos?
   (b) ¿Es posible que tres puntos distintos estén sobre una misma línea recta?
   (c) ¿Todas las líneas son rectas?
   (d) ¿Dos líneas rectas distintas tienen más de un punto en común?
   (e) ¿Los teoremas se pueden demostrar?
   (f) ¿Cuáles son tres de los instrumentos útiles para el trabajo en geometría?

2. En la Figura 1.10

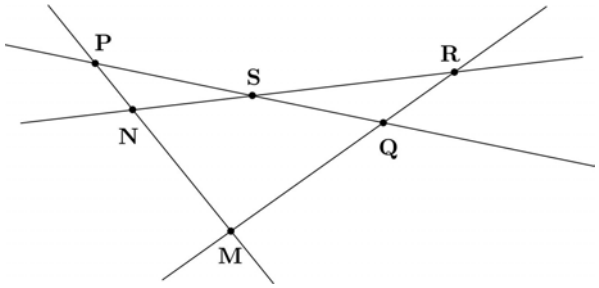


Figura 1.10

(a) Nombrar tres grupos de 3 puntos que sean colineales.

(b) Nombrar al menos tres grupos de 3 puntos que no sean colineales.

(c) Nombrar dos grupos de 4 puntos entre los cuales no haya 3 colineales.

Respuestas

1. (a) Por dos puntos distintos pasa una única línea recta.

   (b) Si, cuando los tres puntos son colineales.

   (c) No, también hay líneas curvas.

   (d) No, dos líneas rectas tienen a los más un punto en común.

   (e) Si, los teoremas son resultados que se pueden demostrar a partir de los términos básicos, las definiciones y los axiomas.

   (f) La regla, la escuadra y el transportador.

2. (a) M, N y P son colineales; M, Q y R son colineales; P, S y Q son colineales.

   (b) M, N y S son tres puntos no colineales; S, R y Q son tres puntos no colineales y N, S y Q son tres puntos no colineales.

   (c) M, S P y R son cuatro puntos de los cuales no hay tres colineales; M, N, Q y S son cuatro puntos de los cuales no hay tres colineales

Lección 2

Semirrectas y segmentos de recta
Medida y congruencia de segmentos de recta

En esta lección veremos los conceptos de semirrecta, segmento de recta, medida y congruencia de segmentos y distancia entre dos puntos.

Semirrecta, segmento de recta

Cualquier punto en una recta la divide en dos partes llamadas **semirrectas**.

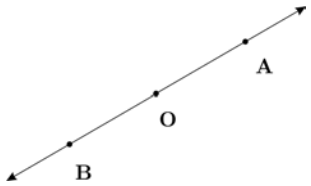
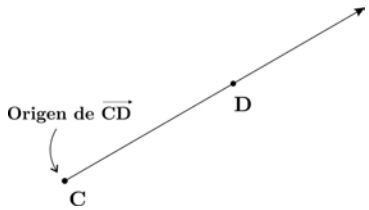


Figura 2.1

Si en la recta de la Figura 2.1 consideramos un punto O, llamado **origen** ó **extremo** de las semirrectas, tenemos las semirrectas que se denotan por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, llamadas semirrectas opuestas.

Una semirrecta tiene origen, pero no tiene fin, se extiende indefinidamente en un sentido.

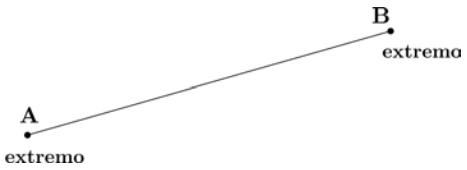
Una semirrecta, llamada también **rayo**, se denota usando dos letras mayúsculas, una para el origen y otra para cualquier otro punto distinto del origen contenido en ella, con una flecha encima de las dos. Por ejemplo, la semirrecta de la Figura 2.2 se denota por $\overrightarrow{CD}$.



Semirrecta o rayo $\overrightarrow{CD}$

Figura 2.2

Dados dos puntos A y B de una misma recta, el conjunto de todos los puntos de la recta situados entre A y B junto con los puntos A y B se llama **segmento de recta** AB, o simplemente **segmento** AB y lo denotamos $\overline{AB}$. Los puntos A y B se llaman **extremos** del segmento.



Segmento $\overline{AB}$

Figura 2.3

Medida de segmentos

Medir un segmento de recta es compararlo con otro que se toma como unidad.

Aunque existen varios sistemas de unidades para medir segmentos, entre otros el sistema inglés, utilizaremos aquí las unidades del sistema métrico decimal. Dependiendo del objeto a medir utilizaremos como unidad el milímetro, el centímetro, el metro o el kilómetro, entre otros, abreviados respectivamente por mm, cm, m y km.

Existen muchos instrumentos para medir segmentos como las cintas métricas y las reglas graduadas. En estas lecciones usaremos una regla graduada en centímetros y milímetros, que se coloca sobre el segmento haciendo coincidir el 0 de la regla con uno de los extremos del segmento. El número en la regla que señala el otro extremo del segmento es su medida.

La medida de un segmento $\overline{AB}$ se denota por $m(\overline{AB})$.

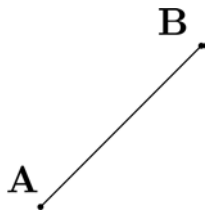
Teniendo en cuenta que suponemos el uso de una regla graduada en centímetros y milímetros, podemos establecer el axioma siguiente.

Axioma 2.1

A cada segmento de recta le corresponde un único número real positivo, que representa su medida.

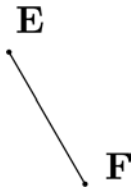
Ejemplo 2.1

Medir, utilizando una regla graduada, los siguientes segmentos de recta:



1.

2.

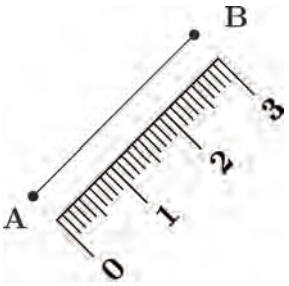


3.

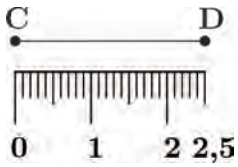
4.

Figura 2.4

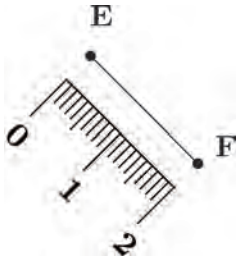
Solución



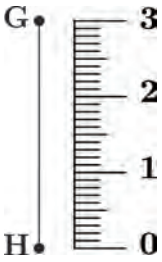
1. $m(\overline{AB}) = 3\,cm$



2. $m(\overline{CD}) = 2,5\,cm$



3. $m(\overline{EF}) = 2\,cm$



4. $m(\overline{GH}) = 3\,cm$

Figura 2.5

Observamos que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{GH}$ tienen la misma medida.

Ejemplo 2.2

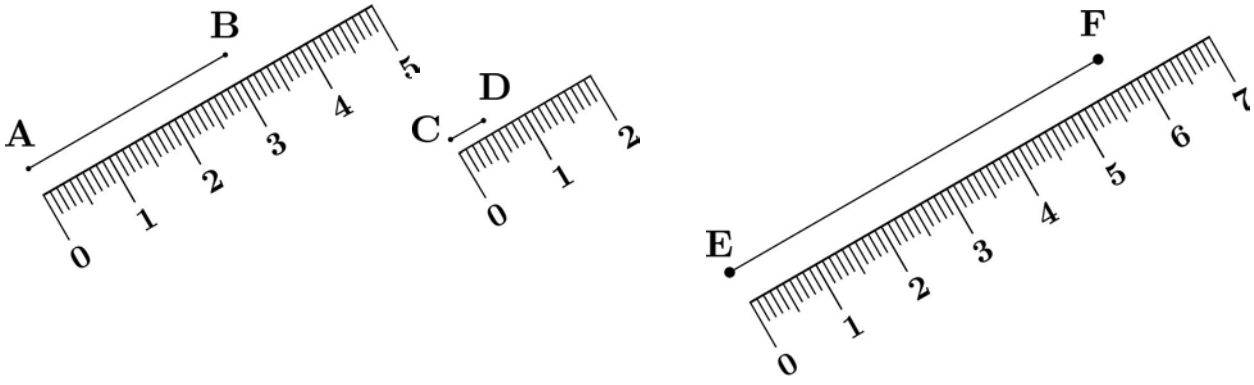
Trazar, en cada numeral, un segmento de recta cuya medida sea:

1. $3\,cm$.
2. $\frac{1}{2}\,cm$.
3. $5,7\,cm$.

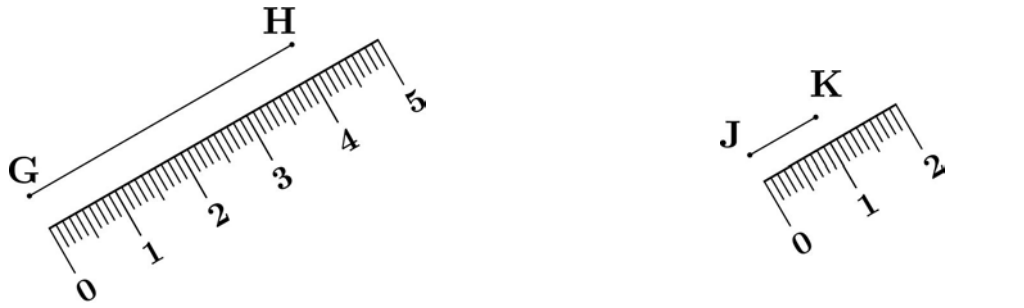
4. $0,4\,dm$.

5. $0,01\,m$.

Solución



1. $m(\overline{AB}) = 3\,cm$
2. $m(\overline{CD}) = 1/2\,cm$
3. $m(\overline{EF}) = 5,7\,cm$



4. $m(\overline{GH}) = 0,4\,dm = 4\,cm$
5. $m(\overline{JK}) = 0,01\,m = 1\,cm$

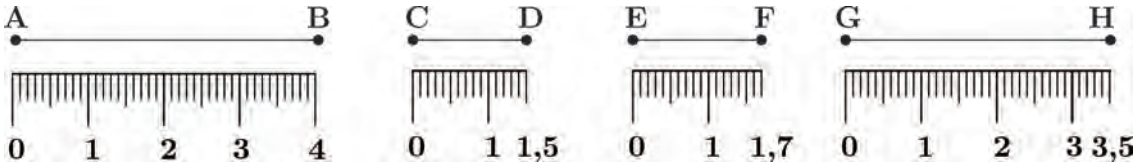
Figura 2.6

Ejemplo 2.3

Medir, utilizando una regla graduada, los segmentos de recta de la Figura 2.7.

Figura 2.7

Solución



$m(\overline{AB}) = 4\,cm$, $m(\overline{CD}) = 1,5\,cm$, $m(\overline{EF}) = 1,7\,cm$ y $m(\overline{GH}) = 3,5\,cm$.

Figura 2.8

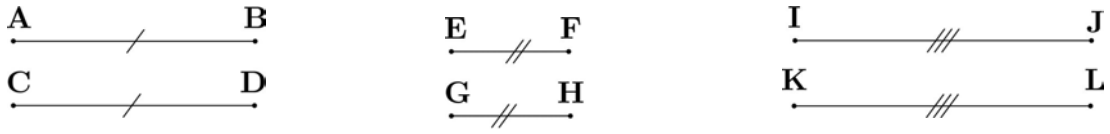
Congruencia de segmentos

Dos segmentos de recta son **congruentes** si tienen la misma medida.

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos segmentos congruentes, escribimos

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}.$$

Gráficamente señalamos los segmentos congruentes como se muestra en la Figura 2.9.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{EF} \cong \overline{GH}$ $\overline{IJ} \cong \overline{KL}$

Figura 2.9

Nota 2.1

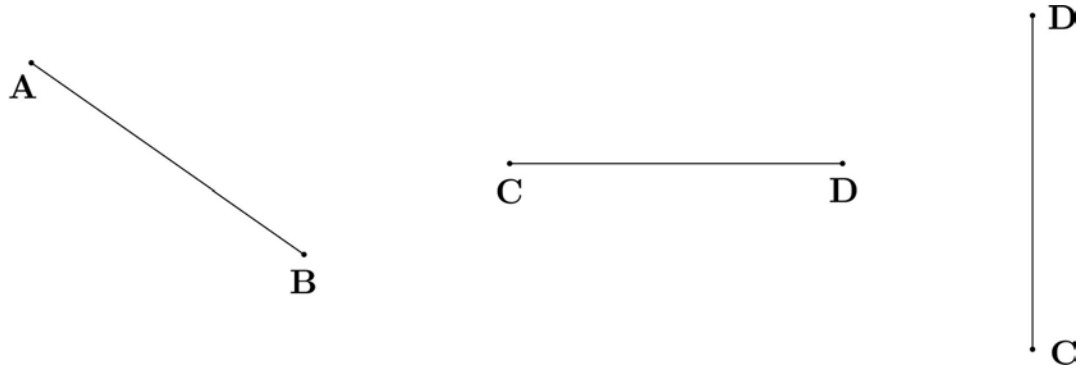
Observemos que si pudiéramos levantar, por ejemplo, el segmento $\overline{AB}$ del papel y llevarlo sobre el segmento $\overline{CD}$, sus extremos coincidirían. Por eso, en algunos textos se dice que dos segmentos son congruentes si al superponer el uno sobre el otro ellos coinciden completamente.

Podemos determinar cuándo dos segmentos son congruentes utilizando la regla graduada para comparar sus medidas u, otra forma, quizás más práctica es la de utilizar el compás. Para ello, por ejemplo, si queremos comparar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la Figura 2.9, hacemos lo siguiente:

1. Colocamos la punta del compás sobre el punto A y abrimos o cerramos el compás hasta colocar la punta de grafito (la que escribe) sobre el punto B.
2. Levantamos el compás y colocamos su punta sobre el punto C. Si al girar el compás la punta de grafito pasa sobre el punto D, entonces concluimos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes. Si la punta de grafito no pasara sobre el punto D, los segmentos no serían congruentes.

Ejemplo 2.4

Los segmentos siguientes son congruentes:



$\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EF}$

Figura 2.10

Comprobar que efectivamente los segmentos son congruentes utilizando primero una regla graduada y luego el compás.

A continuación enunciamos una propiedad importante de los segmentos de recta.

Axioma 2.2

La distancia más corta entre dos puntos es la medida del segmento de recta que los une.

Nota 2.2

Observemos que A y B pueden estar unidos por una línea curva o por segmentos de recta consecutivos, como se muestra en la Figura 2.11, pero el camino más corto para ir de A a B es el segmento de recta $\overline{AB}$ que los une.

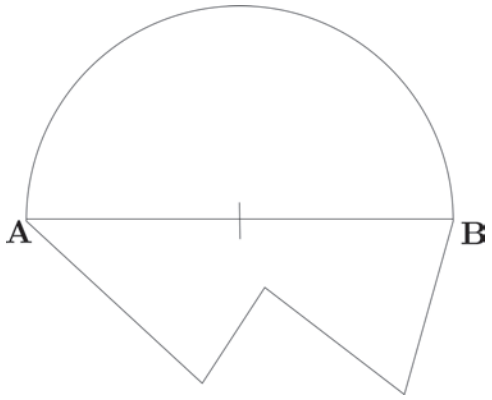


Figura 2.11

Llamamos **distancia** entre dos puntos A y B a la medida del segmento de recta $\overline{AB}$ que los une.

Ejercicios propuestos

1. Medir, utilizando una regla graduada, los siguientes segmentos:

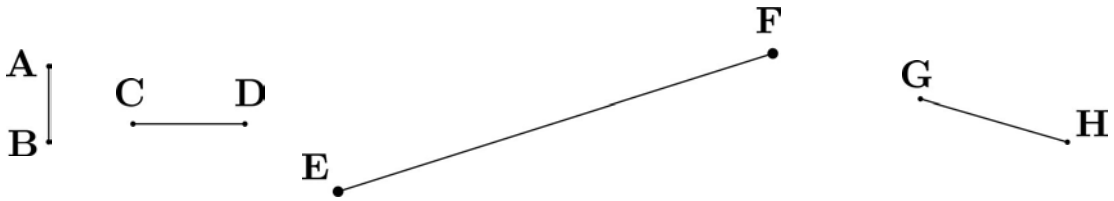


Figura 2.12

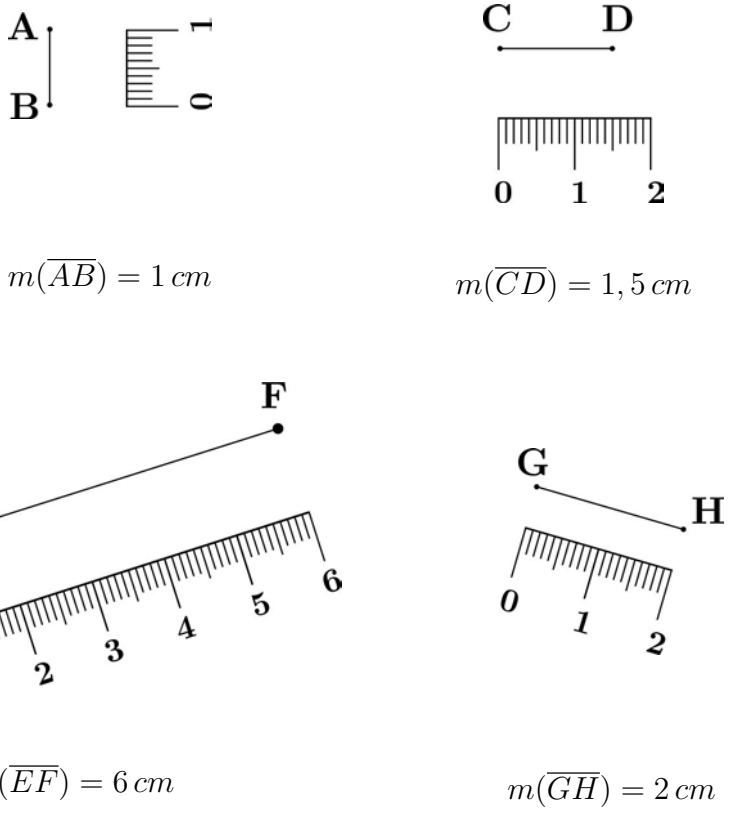
2. En cada literal, trazar un segmento de recta con la medida dada.

   (a) $3\,cm$. (b) $0,5\,dm$. (c) $\dfrac{1}{25}\,m$. (d) $2,5\,cm$.

3. Trazar, usando el compás, un segmento congruente al segmento $\overline{AB}$ y otro congruente al segmento $\overline{EF}$ del Ejercicio 1.

Respuestas

1. En la Figura 2.13 se muestran los segmentos dados con sus medidas.

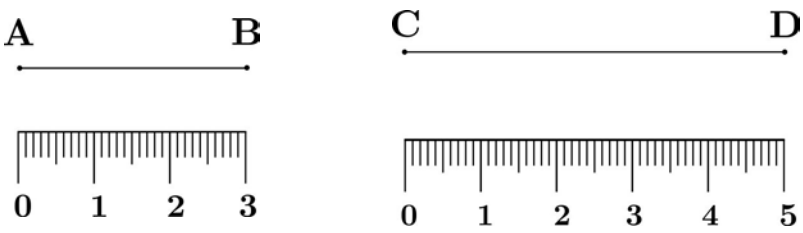


$m(\overline{AB}) = 1\,cm$ $\quad$ $m(\overline{CD}) = 1,5\,cm$

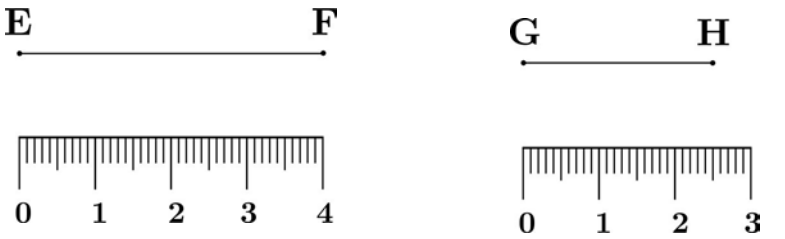
$m(\overline{EF}) = 6\,cm$ $\quad$ $m(\overline{GH}) = 2\,cm$

Figura 2.13

2. En la Figura 2.14 se muestran los segmentos pedidos.



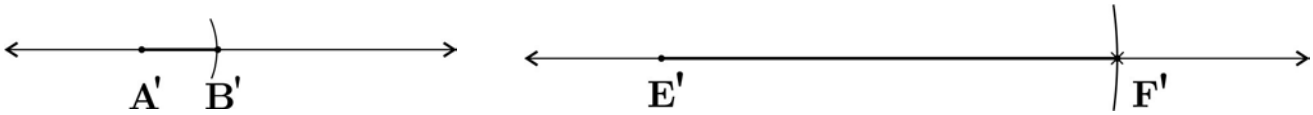
(a) $m(\overline{AB}) = 3\,cm$ (b) $m(\overline{CD}) = 0,5\,dm = 5\,cm$



(c) $m(\overline{EF}) = \dfrac{1}{25}\,m = 4\,cm$ (d) $m(\overline{GH}) = 2,5\,cm$

Figura 2.14

3. En la Figura 2.15 se muestran los segmentos pedidos.



$\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ $\overline{E'F'} \cong \overline{EF}$

Figura 2.15

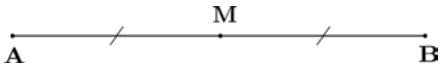
Lección 3

Punto medio de un segmento
Operaciones con segmentos de recta

En esta lección veremos el concepto de punto medio de un segmento y cómo hallarlo mediante una construcción geométrica utilizando la regla y el compás. Además veremos las operaciones con segmentos de recta.

Punto medio de un segmento

El punto sobre un segmento de recta que lo divide en dos segmentos congruentes se llama **punto medio** del segmento.



M punto medio de $\overline{AB}$

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Figura 3.1

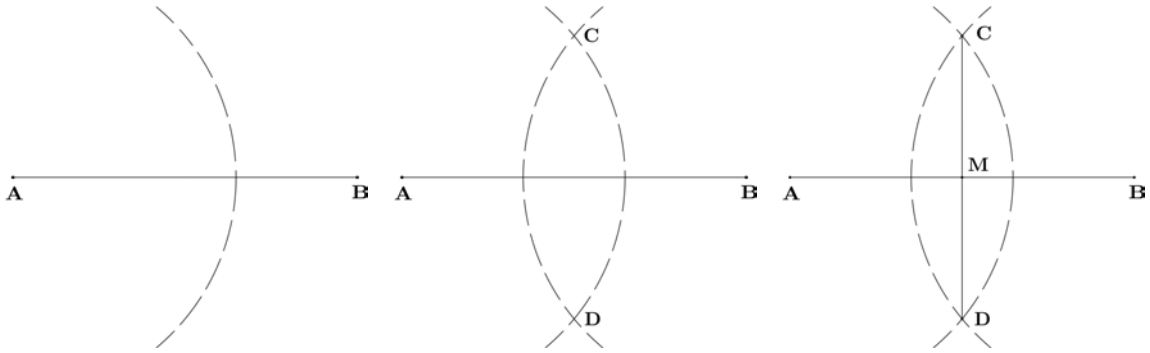
Comprobar, usando la regla graduada, que efectivamente M es el punto medio de $\overline{AB}$, en la Figura 3.1.

Construcción 3.1

¿Cómo hallar el punto medio de un segmento de recta?

Para hallar el punto medio de un segmento de recta $\overline{AB}$, utilizando regla y compás, procedemos como sigue:

1. Colocamos la punta del compás en A y con una abertura un poco mayor que la mitad de la medida del segmento, trazamos un arco apropiado que corte el segmento.
2. Colocamos la punta del compás en B y con una abertura igual a la anterior, trazamos otro arco que corte al primero en dos puntos, que llamaremos C y D.
3. Con la regla trazamos el segmento de recta $\overline{CD}$. El punto de corte M del segmento $\overline{CD}$ con el segmento $\overline{AB}$ es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Figura 3.2

Ejemplo 3.1

1. Hallar el punto medio M del segmento $\overline{AB}$ de la Figura 3.3, cuya medida es $4\,cm$, y sin usar regla decir cuál es la medida de $\overline{MB}$.
2. Hallar el punto medio M del segmento $\overline{GH}$ de la Figura 3.3, cuya medida es $3,5\,cm$, y sin usar regla decir cuál es la medida de $\overline{MH}$.

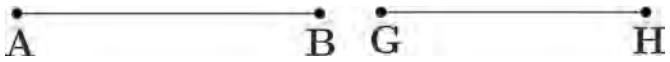


Figura 3.3

Solución

1. Hallamos el punto medio M del segmento $\overline{AB}$, utilizando regla y compás.

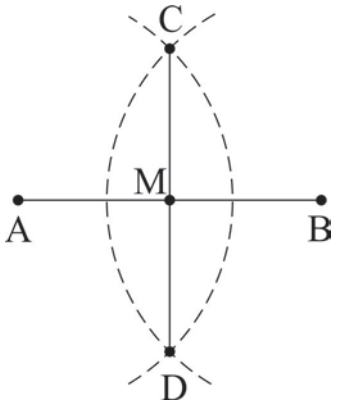


Figura 3.4

Como M es el punto medio de $\overline{AB}$, M divide a $\overline{AB}$ en dos segmentos congruentes $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$, luego cada uno de ellos mide $\dfrac{4}{2} = 2$.

Por tanto, $m(\overline{MB}) = 2\,cm$.

2. Hallamos el punto medio M del segmento $\overline{GH}$, utilizando regla y compás.

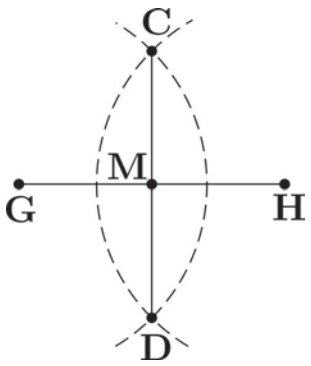


Figura 3.5

Como M es el punto medio de $\overline{GH}$, $\overline{GM} \cong \overline{MH}$ y cada uno de ellos mide $\dfrac{3,5}{2} = 1,75$.

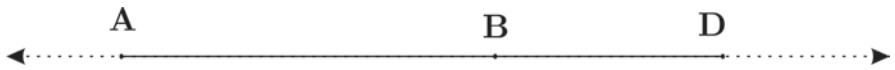
Por tanto, $m(\overline{MH}) = 1,75\,cm$.

Operaciones con segmentos de una misma recta

Así como realizamos operaciones con números reales, podemos definir las siguientes operaciones con segmentos de una misma recta:

- **Suma de segmentos:** si A, B y D son puntos colineales, como se muestra en la Figura 3.6, la medida del segmento $\overline{AD}$ se puede obtener sumando las medidas de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ así

$$m(\overline{AD}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{BD}).$$

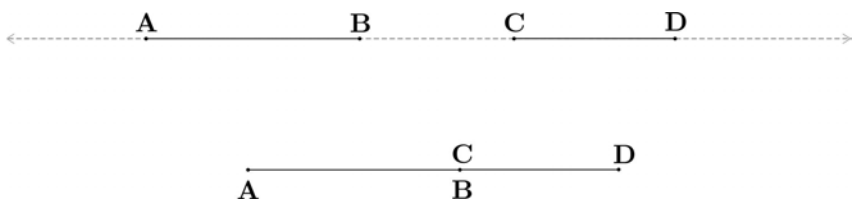


$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$$

Figura 3.6

Se dice que $\overline{AD}$ es la suma de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$.

Si lo que queremos es sumar dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que están sobre una misma recta, se coloca uno a continuación del otro, como se muestra en la Figura 3.7.



$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$$

Figura 3.7

Se dice que $\overline{AD}$ es la suma de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Ejemplo 3.2

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos segmentos de una misma recta cuyas medidas son $4\,cm$ y $3\,cm$ respectivamente, hallar $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$ y su medida.

Solución

$m(\overline{AD}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{CD}) = 4\,cm + 3\,cm = 7\,cm.$

Para hallar el segmento $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$ colocamos el segmento $\overline{CD}$ a continuación del segmento $\overline{AB}$ como se muestra en la Figura 3.8.

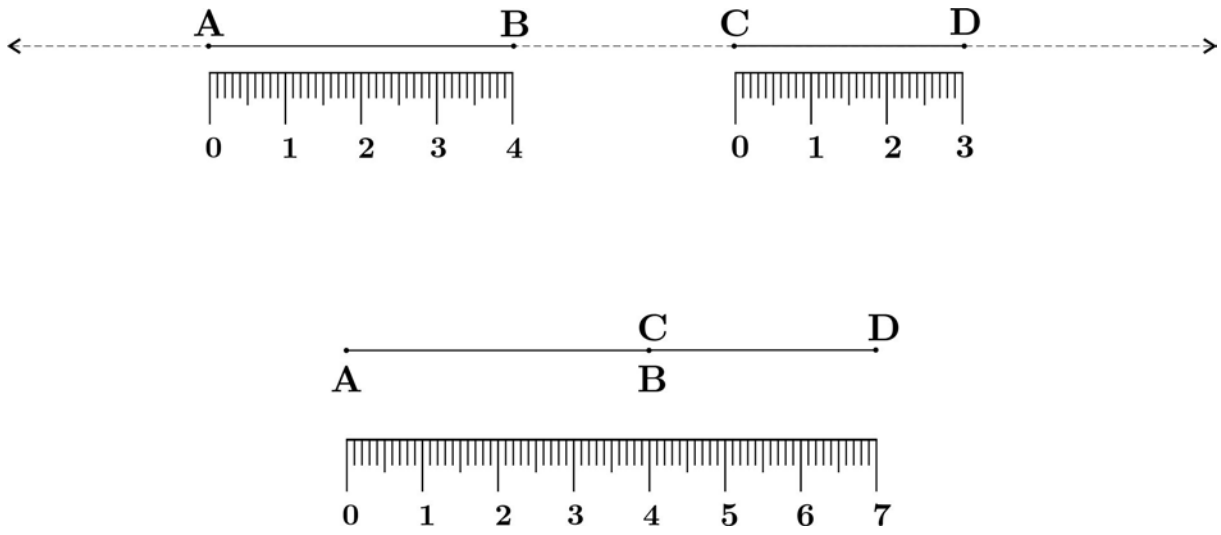
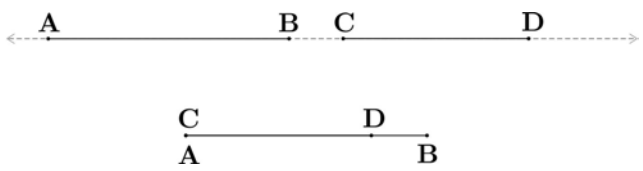


Figura 3.8

Procediendo de la misma forma podemos sumar 3 o más segmentos de una misma recta.

- **Resta de segmentos:** si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos segmentos de una misma línea recta tales que la medida del segmento $\overline{AB}$ es mayor que la medida del segmento $\overline{CD}$, para restar el segmento $\overline{CD}$ del segmento $\overline{AB}$ se coloca $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$ sobre una misma recta, de manera que coincidan en uno de sus extremos como se muestra en la Figura 3.9.



$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{CD}$$

Figura 3.9

El segmento diferencia $\overline{DB}$ es el segmento que une los extremos no coincidentes, y su medida es

$$m(\overline{DB}) = m(\overline{AB}) - m(\overline{CD}).$$

Ejemplo 3.3

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ segmentos de una misma recta cuyas medidas son $4\,cm$ y $3\,cm$ respectivamente. Hallar $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{CD}$ y su medida.

Solución

$m(\overline{DB}) = m(\overline{AB}) - m(\overline{CD}) = 4\,cm - 3\,cm = 1\,cm.$

Para hallar el segmento $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{CD}$ colocamos el segmento $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$ de tal manera que C coincida con A como se muestra en la Figura 3.10.

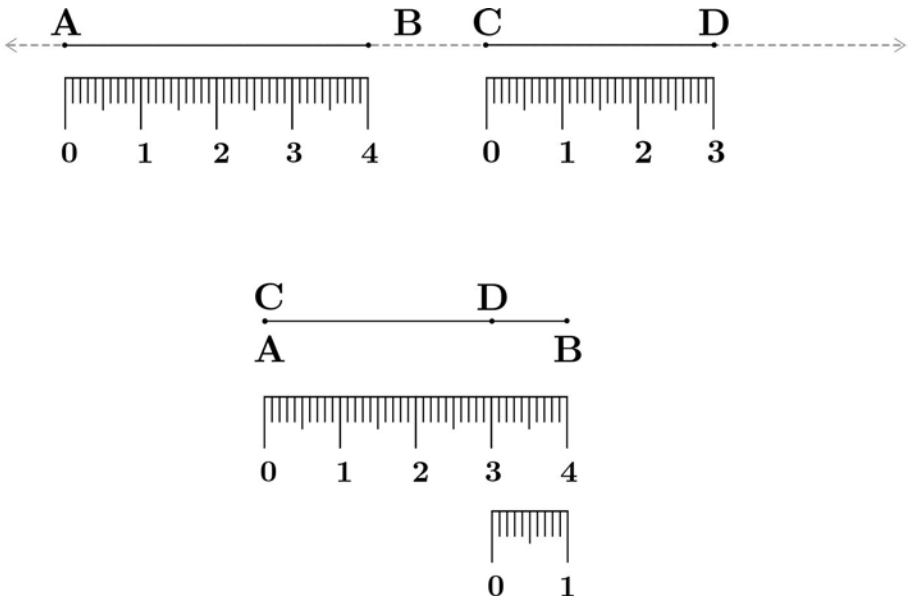


Figura 3.10

- **Producto de un segmento por un número real positivo:** el producto de un segmento $\overline{AB}$ por un número real positivo r es un nuevo segmento que denotamos por

$r(\overline{AB})$ cuya medida es

$$r(m(\overline{AB})).$$

El segmento $r(\overline{AB})$ está colocado sobre la misma recta que contenía a $\overline{AB}$ y es más grande que $\overline{AB}$ si r es un número mayor que 1 o más pequeño que $\overline{AB}$ si r es un número menor que 1.

Ejemplo 3.4

Sea $\overline{AB}$ un segmento que mide $2\,cm$. Hallar $\overline{AF} = 3\overline{AB}$ y $\overline{AG} = \frac{1}{4}(\overline{AB})$ y sus medidas.

Solución

$m(\overline{AF}) = 3m(\overline{AB}) = 3(2) = 6\,cm$ y $m(\overline{AG}) = \frac{1}{4}m(\overline{AB}) = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}\,cm.$

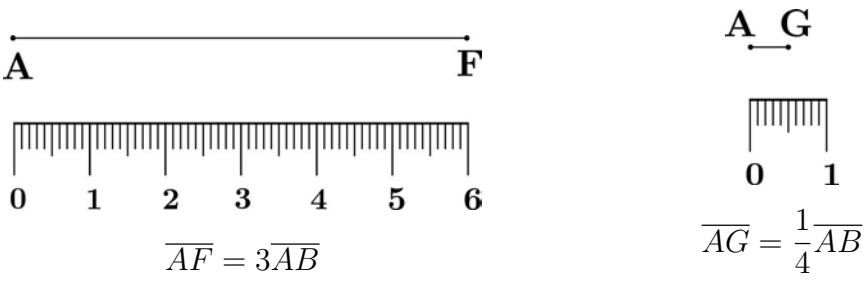


Figura 3.11

$\overline{AF}$ es un segmento cuya medida es 3 veces la medida de $\overline{AB}$ o sea $6\,cm$ y $\overline{AG}$ es un segmento cuya medida es la cuarta parte de la medida de $\overline{AB}$ o sea $\frac{1}{2}\,cm$.

Ejercicios propuestos

1. Utilizando regla y compás, hallar el punto medio de cada uno de los siguientes segmentos:

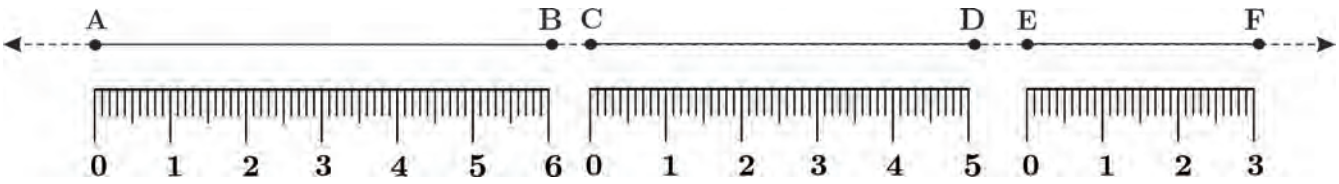


Figura 3.12

2. Si $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son los segmentos del Ejercicio 1., hallar:
   (a) $m(\overline{AB})$, $m(\overline{CD})$ y $m(\overline{EF})$.
   (b) $m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})$.
   (c) $m(\overline{AB}) - m(\overline{EF})$.

(d) $m(2\overline{AB})$.

(e) $m\left(\frac{5}{3}\overline{EF}\right)$.

3. Si $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son los segmentos del Ejercicio 1., hallar $\overline{AB}+\overline{EF}$ y $\overline{AB}-\overline{EF}$.

4. Consideremos los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{OP}$ de la Figura 3.13.

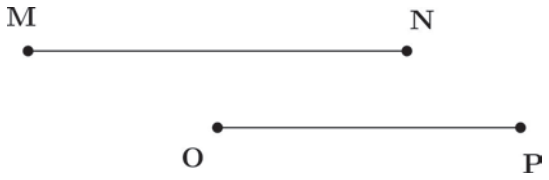


Figura 3.13

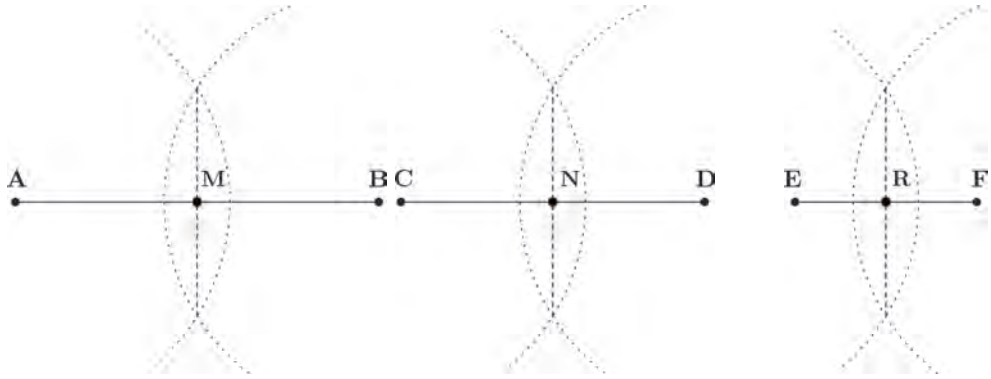
En cada literal hallar los segmentos pedidos y sus medidas:

(a) $\overline{MN}+\overline{OP}$.

(b) $\overline{MN}-\overline{OP}$.

Respuestas

1. En la Figura 3.14 se muestran los puntos medios pedidos.



M punto medio de $\overline{AB}$ N punto medio de $\overline{CD}$ R punto medio de $\overline{EF}$

Figura 3.14

2. (a) $6\,cm$, $5\,cm$ y $3\,cm$.

(b) $11\,cm$.

(c) $3\,cm$.

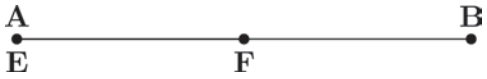
(d) $12\,cm$.

(e) $5\,cm$.

3. En la Figura 3.15 y en la Figura 3.16 se muestran los segmentos pedidos.

$\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{EF}$

Figura 3.15



$\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{EF}$.

Figura 3.16

4. Estas operaciones no pueden hacerse porque los segmentos dados no están sobre la misma línea recta.

Lección 4

Operaciones con segmentos de recta
Ejercicios

En esta lección resolveremos algunos ejercicios en los que se combinan las operaciones de suma y resta de segmentos y de producto de un segmento por un número real positivo.

Ejemplo 4.1

Usando los segmentos de la Figura 4.1 cuyas medidas son $m(\overline{AB}) = 4\,cm$, $m(\overline{CD}) = 1,5\,cm$, $m(\overline{EF}) = 1,7\,cm$, y $m(\overline{GH}) = 3,5\,cm$, hallar, en cada literal, los segmentos pedidos.

Figura 4.1

1. $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH}$.
2. $\overline{GH} - \overline{EF}$.
3. $(\overline{AB} + \overline{CD}) - \overline{GH}$.
4. $2\overline{CD}$.
5. $\frac{5}{3}\,\overline{EF}$.

Solución

1. $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} = \overline{AH}$.

Figura 4.2

$$\begin{aligned} m(\overline{AH}) &= m(\overline{AB}) + m(\overline{CD}) + m(\overline{EF}) + m(\overline{GH}) \\ &= 4 + 1,5 + 1,7 + 3,5 \\ &= 10,7. \end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{AH}) = 10,7\,cm$.

2. $\overline{GH} - \overline{EF} = \overline{FH}$.

Figura 4.3

$$\begin{aligned} m(\overline{FH}) &= m(\overline{GH}) - m(\overline{EF}) \\ &= 3,5 - 1,7 \\ &= 1,8. \end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{FH}) = 1,8\,cm$.

3. $(\overline{AB} + \overline{CD}) - \overline{GH} = \overline{AD} - \overline{GH} = \overline{HD}$.

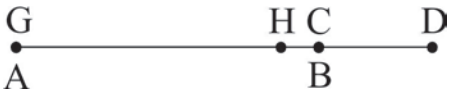


Figura 4.4

$$\begin{aligned} m(\overline{HD}) &= m(\overline{AD}) - m(\overline{GH}) \\ &= (m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})) - m(\overline{GH}) \\ &= (4 + 1,5) - 3,5 \\ &= 5,5 - 3,5 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Luego, $m(\overline{HD}) = 2\,cm$.

4. $\overline{CR} = 2\overline{CD}$.

Figura 4.5

$\overline{CR}$ es tal que $m(\overline{CR}) = 2m(\overline{CD}) = 2(1,5) = 3$.

Luego, $m(\overline{CR}) = 3\,cm$.

5. $\overline{ER} = \dfrac{5}{3}\overline{EF}$.

$\overline{ER}$ es tal que $m(\overline{ER}) = \dfrac{5}{3}m(\overline{EF}) = \dfrac{5}{3}(1,7) = 2,8\bar{3}$

Luego, $m(\overline{ER}) = 2,8\bar{3}\,cm$.

Figura 4.6

Ejemplo 4.2

Dados los puntos R, T, S y V de la Figura 4.7

1. ¿Cuál es la distancia de R a V?
2. ¿Es $m(\overline{RS}) + m(\overline{SV}) = m(\overline{RV})$? ¿Por qué?
3. Hallar $m(\overline{RT}) + m(\overline{TS}) + m(\overline{SV})$. ¿Es esta cantidad igual a $m(\overline{RV})$?

Figura 4.7

Solución

1. La distancia de R a V es $m(\overline{RV}) = 7\,cm$.

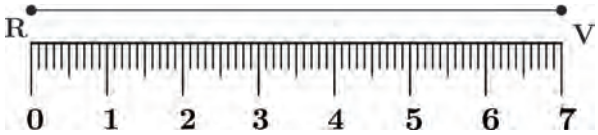


Figura 4.8

2. $m(\overline{RS}) = 4\,cm$; $m(\overline{SV}) = 3\,cm$. Así, $m(\overline{RS}) + m(\overline{SV}) = 4 + 3 = 7$.

   Luego, $m(\overline{RS} + \overline{SV}) = 7\,cm$.

   $m(\overline{RS}) + m(\overline{SV})$ es igual a $m(\overline{RV})$ porque R, S y V son colineales y $\overline{RV} = \overline{RS} + \overline{SV}$.
3. $m(\overline{RT}) + m(\overline{TS}) + m(\overline{SV}) = 2 + 2 + 3 = 7\,cm$. Esta medida es igual a $m(\overline{RV})$ porque R, T, S y V son colineales y $\overline{RV} = \overline{RT} + \overline{TS} + \overline{SV}$.

Ejemplo 4.3

Si los puntos A, B, C y D de la Figura 4.9 son colineales y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, probar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Figura 4.9

Solución

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{BD}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CD}) \tag{4.1}$$

Como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ entonces $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ y sustituyendo en 4.1 tenemos

$m(\overline{CD}) + m(\overline{BD}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CD})$.

Luego, $m(\overline{BD}) = m(\overline{AC})$.

Por tanto, $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Notas 4.1

1. Observamos que las operaciones para segmentos que hemos definido, se restringen a segmentos que están sobre una misma línea recta, es decir, segmentos colineales. Más adelante, cuando expliquemos el concepto de líneas paralelas, las operaciones hechas aquí para segmentos colineales son válidas también para segmentos paralelos. Si los segmentos no son paralelos no tiene sentido hablar de su suma.

2. Para simplificar la escritura utilizaremos la notación de segmento para representar tanto el segmento como su medida. En cada caso, el texto completo nos va a permitir interpretar correctamente en qué sentido se utilizan los símbolos.

   Por ejemplo, podemos escribir $\overline{AB} = 5\,cm$, para decir que la medida de $\overline{AB}$ es igual a $5\,cm$ en lugar de escribir $m(\overline{AB}) = 5\,cm$. También podremos escribir $\overline{AB} + \overline{CD} = 18\,cm$, para indicar que la suma de de las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $18\,cm$.

Ejercicios propuestos

En cada numeral, usando los segmentos de la Figura 4.10 cuyas medidas son $\overline{MN} = 3\,cm$, $\overline{OP} = 2\,cm$ y $\overline{QR} = 4\,cm$, hallar los segmentos pedidos y sus medidas.

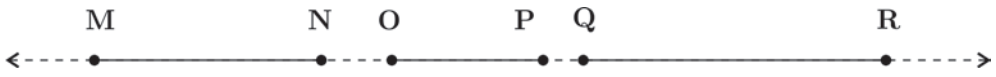


Figura 4.10

1. $\overline{MN} + \overline{OP}$.
2. $\overline{QR} - \overline{OP}$
3. $\overline{MN} + \overline{OP} - \overline{QR}$
4. $\overline{MN} + 3\overline{OP} - 2\overline{QR}$
5. $\frac{1}{3}\overline{MN} - \frac{1}{2}\overline{OP}$

Respuestas

1. $\overline{MN} + \overline{OP} = 5\,cm$.

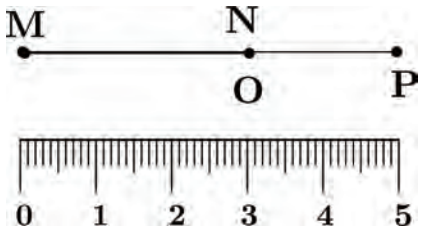


Figura 4.11

2. $\overline{QR} - \overline{OP} = 2\,cm$.

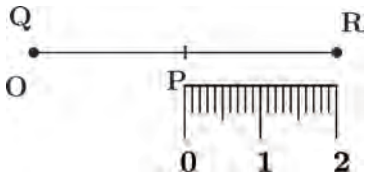


Figura 4.12

3. $\overline{MN} + \overline{OP} - \overline{QR} = 1\,cm.$

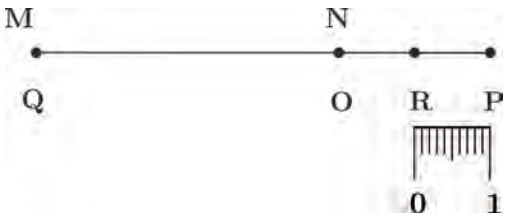


Figura 4.13

4. Llamemos $\overline{QT} = 2\overline{QR} = 8\,cm$ y $\overline{OS} = 3\overline{OP} = 6\,cm$, entonces $\overline{MN} + 3\overline{OP} - 2\overline{QR} = \overline{MN} + \overline{OS} - \overline{QT} = 1\,cm.$

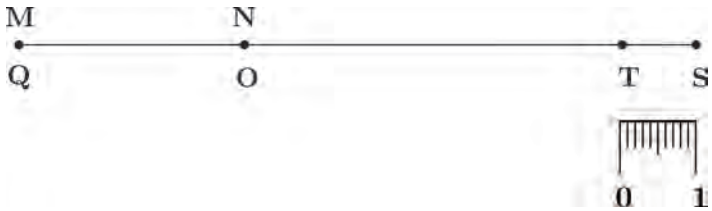


Figura 4.14

5. $\frac{1}{3}\overline{MN} - \frac{1}{2}\overline{OP} = 0\,cm.$

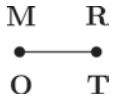


Figura 4.15

Observemos que los segmentos a restar tienen la misma medida, entonces al restarlos obtenemos un segmento de medida 0.

Lección 5

Planos

En esta lección veremos algunos axiomas y teoremas relacionados con el plano y los conceptos de puntos, semirrectas y rectas coplanares, además de las posiciones relativas de dos planos y de un plano y una recta.

Iniciaremos con un axioma y dos teoremas que nos enuncian algunas propiedades importantes del plano. Una buena imagen que nos aproxima al concepto de plano es la superficie de un piso o de una pared, sin embargo debemos entender que un plano se extiende infinitamente en todas las direcciones.

Axioma 5.1

Por tres puntos no colineales pasa uno y sólo un plano.

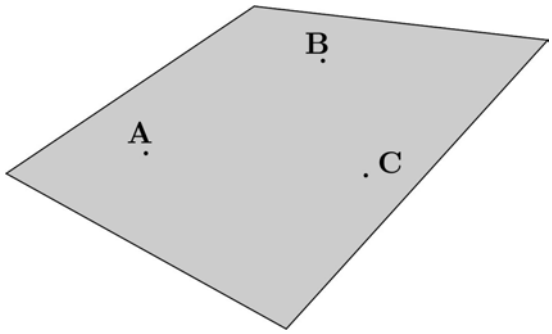


Figura 5.1

Una recta en un plano lo divide en dos regiones llamadas **semiplanos**.

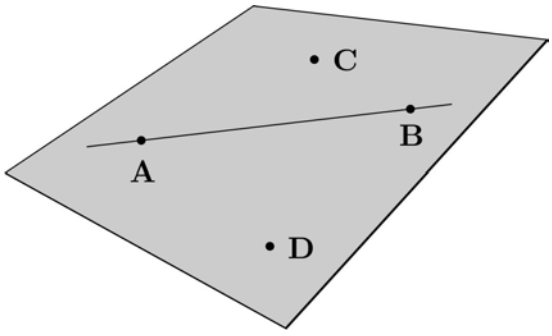


Figura 5.2

En la Figura 5.2 la recta AB divide al plano en dos semiplanos. El punto C y el punto D están en dos semiplanos diferentes respecto a la recta AB.

Los siguientes teoremas nos dan las condiciones mínimas para determinar un plano.

Teorema 5.1

Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano y sólo uno.

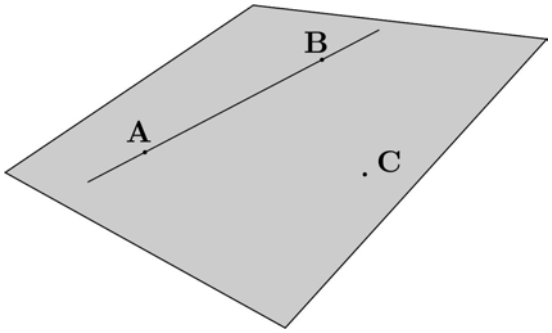


Figura 5.3

Prueba

Dos puntos de la recta y el punto exterior a ella son tres puntos no colineales que, por el Axioma 5.1, determinan un plano y sólo uno.

Teorema 5.2

Dos rectas distintas que tienen un solo punto en común determinan un plano y sólo uno.

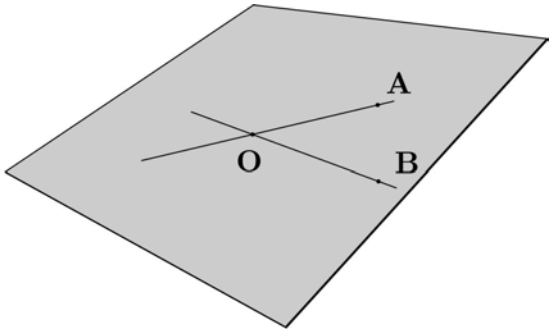


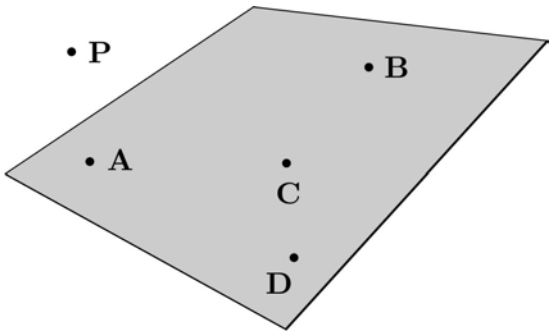
Figura 5.4

Prueba

Si tomamos el punto en común y un punto diferente en cada una de las rectas, tenemos tres puntos no colineales que, por el Axioma 5.1, determinan un plano y sólo uno.

Notas 5.1

1. Si cuatro o más puntos están localizados en un mismo plano se dice que ellos son **coplanares**.



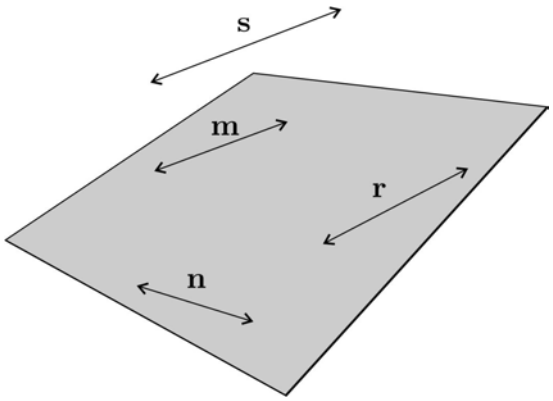
En la Figura 5.5,

A, B, C y D son puntos coplanares.

A, B, C y P no son puntos coplanares.

Figura 5.5

2. Si dos o más rectas o semirrectas están localizadas en un mismo plano se dice que son **coplanares**.



En la Figura 5.6,

m y n son rectas coplanares.

m, n y r son rectas coplanares.

m y s no son rectas coplanares.

Figura 5.6

Ejemplo 5.1

¿Por qué una mesa de cuatro patas puede cojear en el piso mientras que una de tres patas siempre está firme?

Solución

Porque tres puntos diferentes determinan un único plano que los contiene y cuatro puntos pueden o no ser coplanares. Por esta razón se usan trípodes en fotografía y en topografía.

Veremos a continuación las posiciones relativas de dos planos y de una recta y un plano.

Posiciones relativas de dos planos

Dos planos distintos tienen a lo más una recta en común.

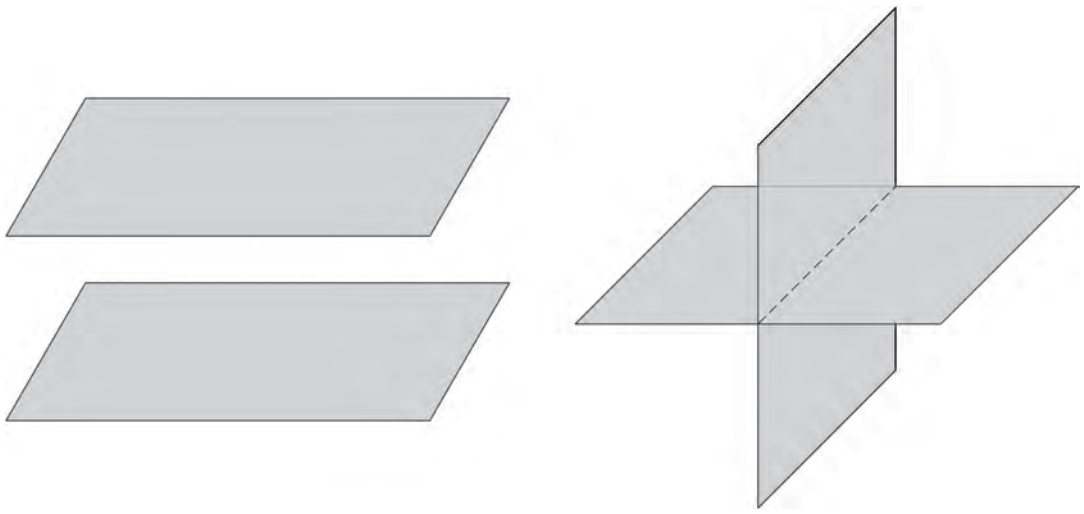


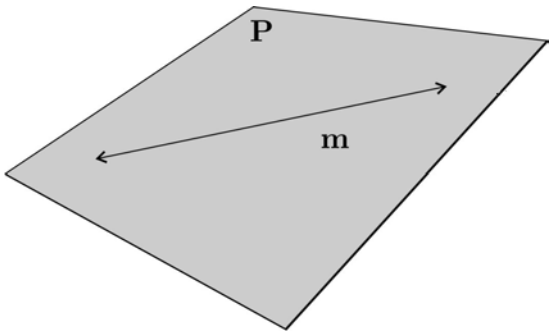
Figura 5.7

En otras palabras, dos planos distintos no tienen puntos comunes o tienen una recta en común como se muestra en la Figura 5.7

Posiciones relativas de una recta y un plano

Consideremos una recta m y un plano P.

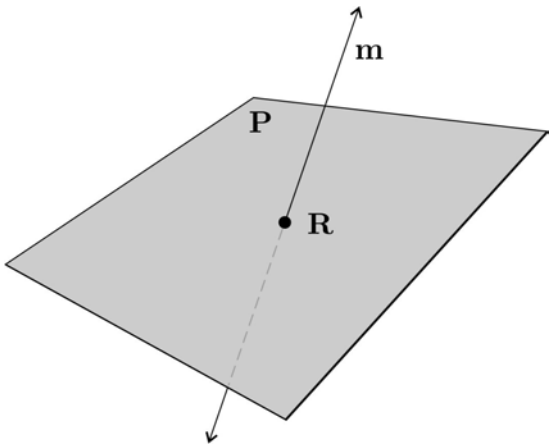
1. Si la recta m está localizada en el plano P entonces todos los puntos de la recta m son puntos del plano P.



En la Figura 5.8, todos los puntos de la recta m son puntos del plano P.

Figura 5.8

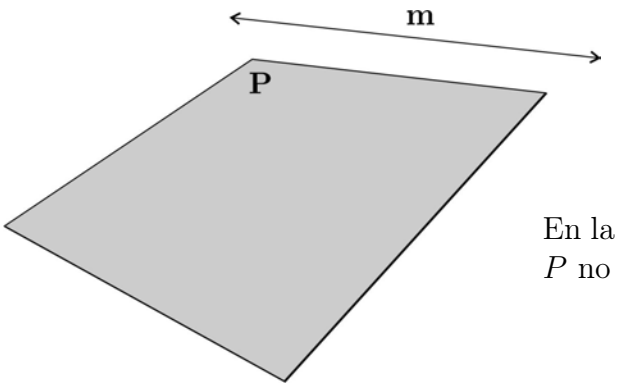
2. Si la recta m corta al plano P en un punto, digamos R, entonces la recta y el plano tienen un único punto en común que es R.



En la Figura 5.9, R es el único punto en común de la recta m y el plano P.

Figura 5.9

3. Si la recta m no está localizada en el plano, ni lo corta en un punto, entonces la recta m y el plano P no tienen puntos en común.



En la Figura 5.10, la recta m y el plano P no tienen puntos en común.

Figura 5.10

En otras palabras, un plano y una recta que no esté localizada en el plano tienen a lo más un punto en común.

Ejercicios propuestos

1. En cada literal contestar la pregunta, justificando la respuesta.
   (a) ¿Tres puntos no colineales siempre son coplanares?
   (b) ¿Dos planos distintos se cortan en un único punto?
   (c) ¿Una recta corta un plano en dos puntos?
   (d) ¿Dos líneas rectas distintas tienen más de un punto en común?
   (e) ¿Dos rectas coplanares pueden tener un punto en común?

(f) ¿Un semiplano es el punto de corte de una recta y un plano?

2. En la Figura 5.11

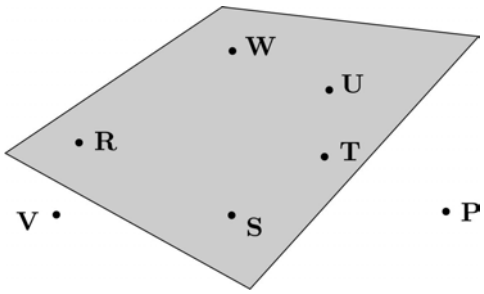


Figura 5.11

(a) Nombrar al menos tres grupos de 4 puntos que sean coplanares.

(b) Nombrar al menos tres grupos de 4 puntos que no sean coplanares.

(c) Nombrar dos grupos de 5 puntos de los cuales 4 no sean coplanares.

Respuestas

1. (a) Si, de hecho determinan un único plano.

(b) No, dos planos distintos o no tienen ningún punto en común o se cortan en una línea recta.

(c) No, si una recta corta un plano lo hace en un único punto.

(d) No, dos líneas rectas tienen a los más un punto en común.

(e) Si, dos rectas coplanares pueden tener un punto en común o ninguno.

(f) No, un semiplano es una región del plano determinado por una recta en el plano.

2. (a) R, S, T y U son coplanares; R, S, T y W son coplanares; R, T, U y W son coplanares.

(b) V, R, S y T son cuatro puntos no coplanares; P, S, T y U son cuatro puntos no coplanares y V, P, S y T son cuatro puntos no coplanares.

(c) V, R, S, P y T son cinco puntos de los cuales no hay cuatro coplanares; V, R, T, U y P son cinco puntos de los cuales no hay cuatro coplanares.

Lección 6

Ángulos. Medida de ángulos

En esta lección trabajaremos el concepto de ángulo, sus partes y cómo hallar su medida usando el transportador.

Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas, o rayos, que tienen un extremo común. Si O es el extremo común de las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, las semirrectas se llaman **lados del ángulo** y el punto común O se llama **vértice del ángulo**.

Las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ dan lugar a dos ángulos, como se muestra en la Figura 6.1. Sin embargo, si no se da una explicación adicional, consideraremos el de menor abertura.

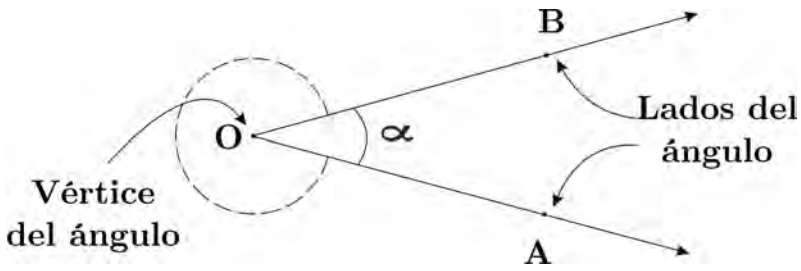


Figura 6.1

Un ángulo se puede denotar usando tres letras mayúsculas, con la letra del vértice en la mitad. Por ejemplo, el ángulo de la Figura 6.1 se denota por $\angle AOB$ ó $\angle BOA$. También se puede denotar con una letra griega α (alfa), β (beta), γ (gamma), ..., con un número 1, 2, 3, ... o con una letra minúscula a, b, c, ..., que se coloca al interior del ángulo. Así, el ángulo de la Figura 6.1 también se puede denotar por $\angle\alpha$. Cuando no haya lugar a confusión, se denota por la letra mayúscula del vértice, en este caso, $\angle O$.

Algunas veces en vez del símbolo de ángulo escrito a la izquierda se usa un el símbolo de ángulo colocado sobre las letras. Así, por ejemplo, el ángulo $\angle AOB$ también se denota por $\widehat{AOB}$.

Medida de ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad.

Aunque existen varios sistemas para medir ángulos, utilizaremos aquí el sistema sexagesimal, cuya unidad es el **grado**.

Para explicar el concepto de grado, veamos primero el de circunferencia.

Sea O un punto de un plano dado y r un número real positivo. La **circunferencia** con **centro** O y **radio** r es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto O.

En otras palabras, la circunferencia es el conjunto de puntos de un plano, que "equidistan" de otro punto del plano, llamado centro de la circunferencia.

Si dividimos una circunferencia con centro en un punto O en 360 partes iguales, un ángulo de un grado, que denotamos por 1°, es el ángulo cuyo vértice es O y cuyos lados cortan dos divisiones consecutivas de la circunferencia. En la Figura 6.2 se ilustra un ángulo de 1°.

Figura 6.2

1° se divide en 60 partes iguales llamadas **minutos** y, a su vez, un minuto se divide en 60 partes iguales llamadas **segundos**.

Lo anterior se denota, por ejemplo, para un ángulo de 43 grados, 15 minutos y 17 segundos, por 45° 15′ 17”.

Estas divisiones del ángulo se usan cuando se requieren medidas muy precisas como en astronomía y en navegación marítima o espacial.

La medida de un ángulo α se denota por $m(\angle\alpha)$.

Teniendo en cuenta estas divisiones de la circunferencia y que tomamos la menor abertura limitada por dos rayos, podemos establecer el axioma siguiente.

Axioma 6.1

A cada ángulo le corresponde un único número real entre 0 y 180.

Con base en la definición, un ángulo cuyos dos lados coinciden mide 0° y se llama **ángulo nulo**. Cuando los lados del ángulo son dos semirrectas opuestas, el ángulo mide 180° y se llama **ángulo llano**. Estos ángulos se ilustran en la Figura 6.3

Ángulo nulo

$m(\angle AOB) = 0°$

Ángulo llano

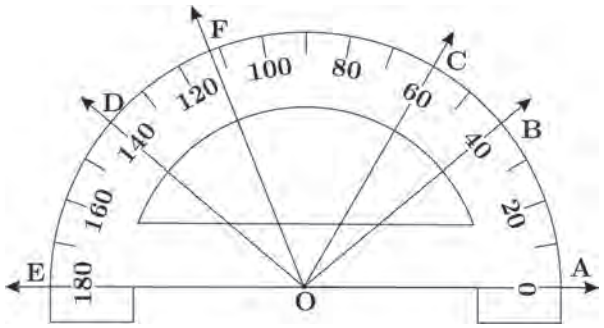
$m(\angle AOB) = 180°$

Figura 6.3

Para medir ángulos usamos el **transportador**.

Para medir un $\angle AOB$ usando el transportador, colocamos éste sobre el ángulo de tal forma que el centro del semicírculo del transportador coincida con el vértice del ángulo y uno de los

lados, digamos $\overrightarrow{OA}$, coincida con el radio que pasa por 0°, como se muestra en la Figura 6.4. El lado $\overrightarrow{OB}$, o su prolongación, coincidirá con una división del semicírculo del transportador o caerá entre dos divisiones, obteniendo así sobre la escala del transportador el número exacto o aproximado de grados que mide el ángulo.



$m(\angle AOB) = 40°$
$m(\angle AOC) = 60°$
$m(\angle AOF) \approx 112°$
$m(\angle AOD) = 140°$
$m(\angle AOE) = 180°$

Figura 6.4

Ejemplo 6.1

Usando el transportador medir los ángulos de la Figura 6.5.

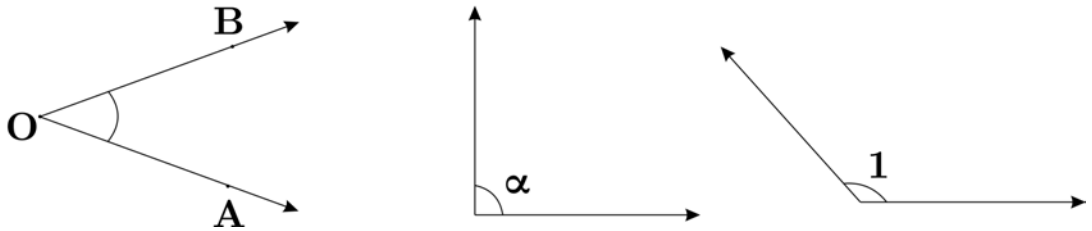
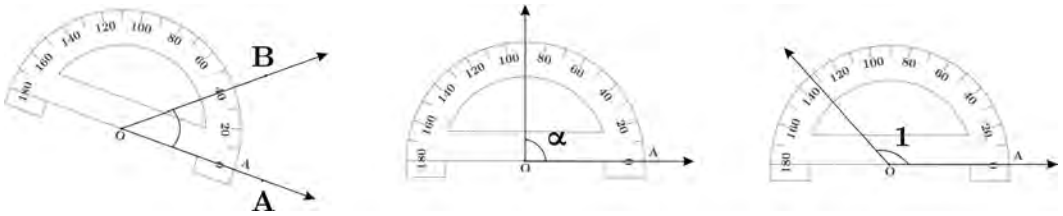


Figura 6.5

Solución

Para medir los ángulos dados colocamos el transportador como se muestra en la Figura 6.6.



$m(\angle AOB) = 40°$ $m(\angle \alpha) = 90°$ $m(\angle 1) = 132°$

Figura 6.6

Para dibujar un $\angle AOB$ de una medida dada, trazamos una semirrecta $\overrightarrow{OA}$ y sobre ella colocamos el transportador de tal manera que su centro coincida con el punto O y el radio que

pasa por $0°$ esté sobre la semirrecta. Ubicamos en el transportador la división correspondiente al número de grados requerido, señalamos ese punto en el papel y lo llamamos B. Retiramos el transportador y trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OB}$. El $\angle AOB$ es el ángulo pedido.

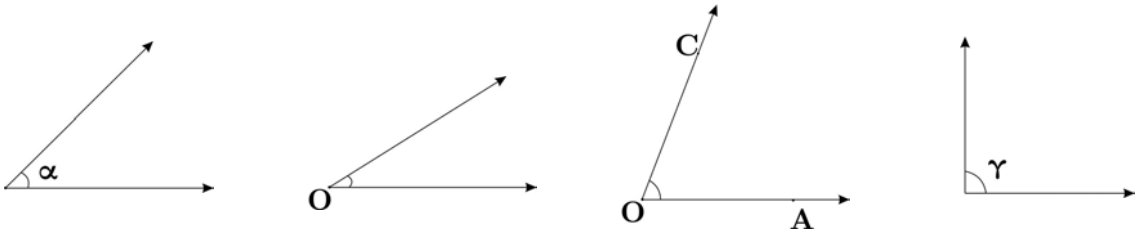
Ejemplo 6.2

Usar regla y transportador para trazar los ángulos cuyas medidas son:

1. $45°$.
2. $32°$.
3. $69°$.
4. $90°$.

Solución

En la Figura 6.7 se muestran los ángulos pedidos y sus medidas.



$m(\angle\alpha) = 45°$ $m(\angle O) = 32°$ $m(\angle AOC) = 69°$ $m(\angle\gamma) = 90°$

Figura 6.7

Ejemplo 6.3

En la Figura 6.8, encontrar la medida en grados de cada uno de los siguientes ángulos:

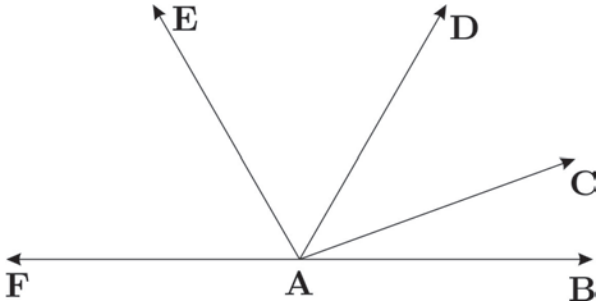


Figura 6.8

$\angle BAC$, $\angle DAF$,
$\angle CAD$, $\angle CAE$,
$\angle DAE$, $\angle BAF$,
$\angle EAF$, $\angle EAB$.

Solución

Los ángulos pedidos tienen las siguientes medidas:

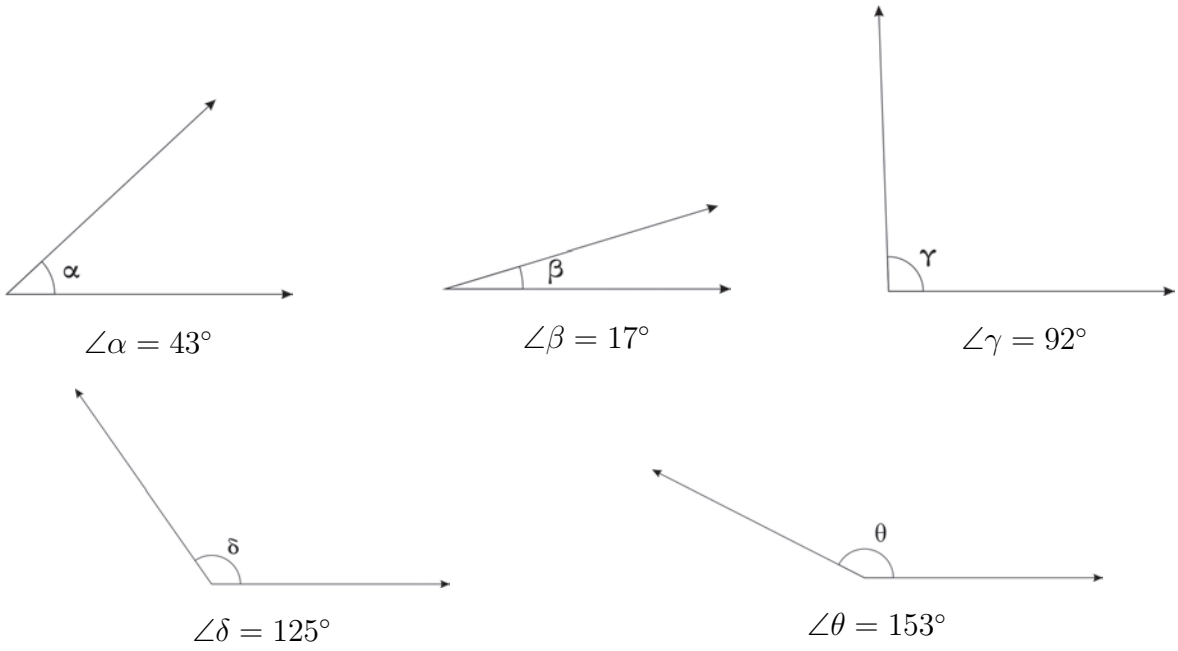
$\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 40°$, $\angle DAE = 60°$, $\angle EAF = 60°$
$\angle DAF = 120°$, $\angle CAE = 100°$, $\angle BAF = 180°$, $\angle EAB = 120°$.

Ejemplo 6.4

Usando el transportador trazar los ángulos cuyas medidas son: $\angle\alpha = 43°$, $\angle\beta = 17°$, $\angle\gamma = 92°$, $\angle\delta = 125°$ y $\angle\theta = 153°$.

Solución

Usando regla y transportador trazamos los ángulos pedidos, los cuales se muestran en la Figura 6.9.



$\angle\alpha = 43°$ $\angle\beta = 17°$ $\angle\gamma = 92°$

$\angle\delta = 125°$ $\angle\theta = 153°$

Figura 6.9

Ejemplo 6.5

1. En la Figura 6.10, hallar la medida de los siguientes ángulos:

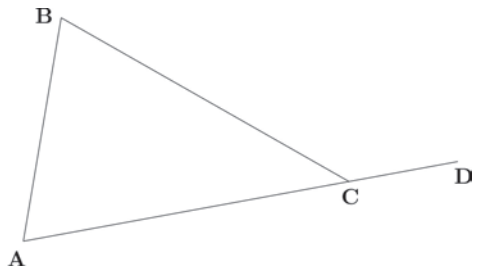


Figura 6.10

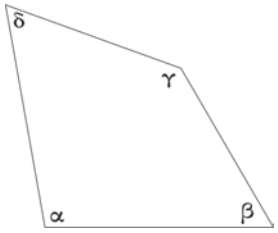
$\angle A$

$\angle B$

$\angle BCA$

$\angle BCD$.

2. En la Figura 6.11, hallar la medida de los siguientes ángulos:



$\angle\alpha$

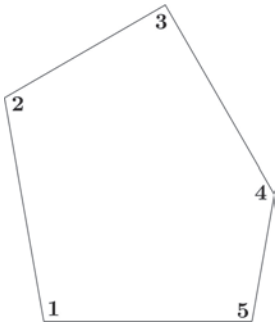
$\angle\beta$

$\angle\gamma$

$\angle\delta$.

Figura 6.11

3. En la Figura 6.12, hallar la medida de los siguientes ángulos:



$\angle 1$

$\angle 2$

$\angle 3$

$\angle 4$

$\angle 5$.

Figura 6.12

Solución

Los ángulos pedidos tienen las siguientes medidas:

1. $\angle A = 70°$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 40°$, $\angle BCD = 140°$.
2. $\angle\alpha = 100°$, $\angle\beta = 60°$, $\angle\gamma = 140°$, $\angle\delta = 60°$.
3. $\angle 1 = 100°$, $\angle 2 = 110°$, $\angle 3 = 90°$, $\angle 4 = 140°$, $\angle 5 = 100°$.

Ejercicios propuestos

1. En cada literal trazar, usando la regla y el transportador, un ángulo con la medida dada.
   (a) 15°.
   (b) 37°.
   (c) 90°.
   (d) 0°.
   (e) 143°.
2. En la Figura 6.13, hallar la medida de los siguientes ángulos:

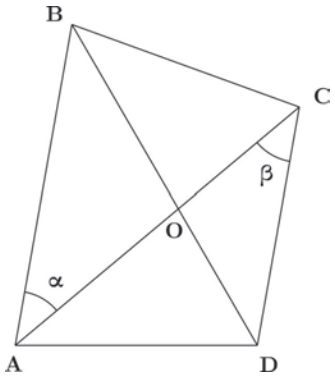
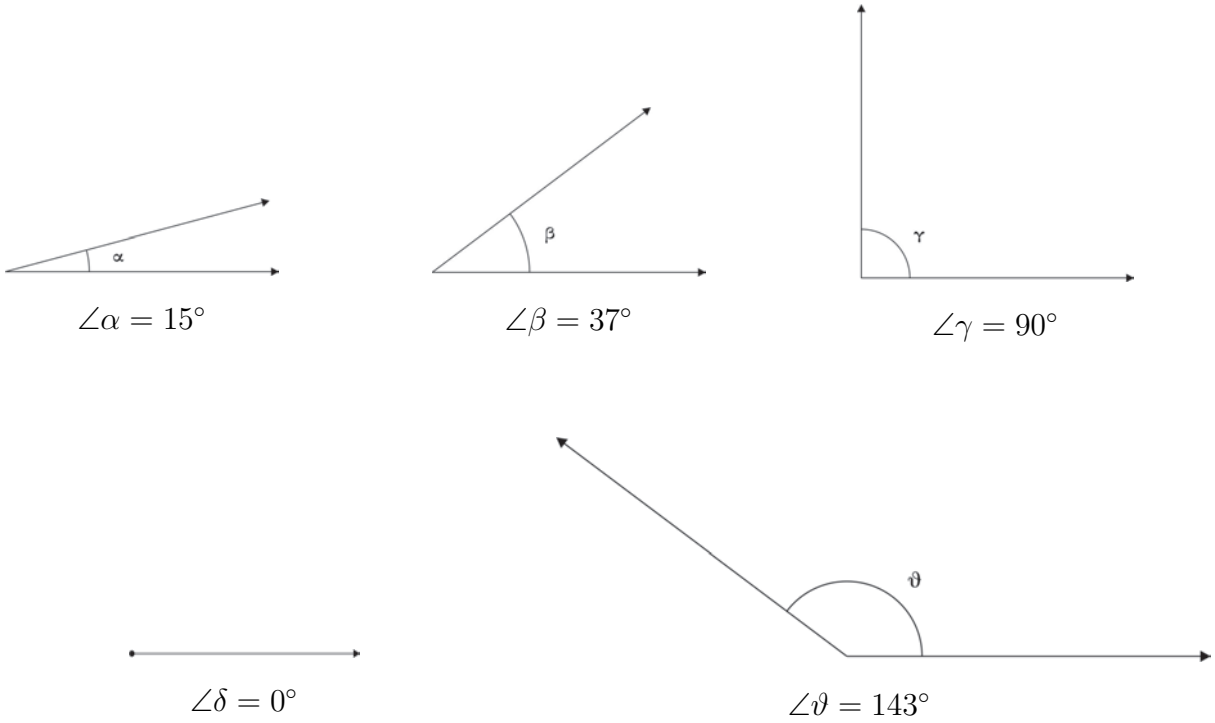


Figura 6.13

$\angle BOC$, $\angle AOD$,
$\angle OBA$, $\angle BAO$,
$\angle BAC$, $\angle ADC$,
$\angle DCB$, $\angle CBA$,
$\angle\alpha$, $\angle\beta$.

Respuestas

1. En la Figura 6.14 se muestran los ángulos pedidos.



$\angle\alpha = 15°$ $\angle\beta = 37°$ $\angle\gamma = 90°$

$\angle\delta = 0°$ $\angle\vartheta = 143°$

Figura 6.14

2. $\angle BOC = 80°$, $\angle AOD = 80°$,
   $\angle OBA = 40°$, $\angle BAO = 40°$,
   $\angle BAC = 40°$, $\angle ADC = 100°$,
   $\angle DCB = 100°$, $\angle CBA = 80°$,
   $\angle\alpha = 40°$, $\angle\beta = 40°$.

Lección 7

Congruencia de ángulos. Bisectriz de un ángulo

En esta lección trabajaremos el concepto de congruencia de ángulos y haremos una construcción geométrica para trazar un ángulo congruente con un ángulo dado. Veremos además el concepto de bisectriz de un ángulo. Terminaremos la lección usando la regla y el compás para dividir un ángulo en dos ángulos congruentes, trazando así la bisectriz del ángulo.

Congruencia de ángulos

Dos ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida.

Para denotar que dos ángulos $\angle AOB$ y $\angle DOC$ son congruentes escribimos

$$\angle AOB \cong \angle DOC.$$

Los ángulos $\angle AOB$ y $\angle DOC$ de la Figura 7.1 son congruentes.

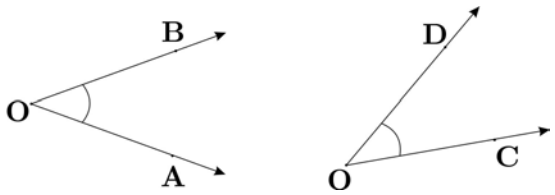


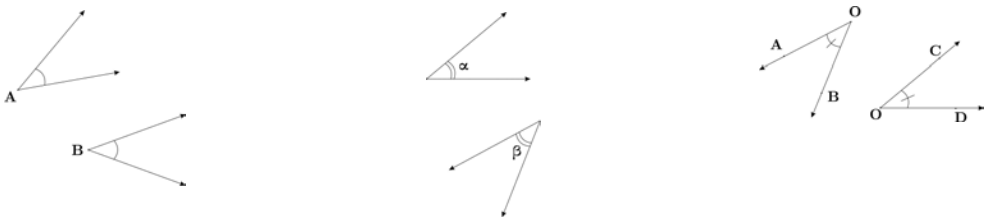
Figura 7.1

Usando el transportador podemos comprobar que el $\angle AOB$ es congruente con el $\angle COD$.

Nota 7.1

Observemos que si pudiéramos levantar, por ejemplo, el ángulo $\angle AOB$ del papel y llevarlo sobre el ángulo $\angle COD$, sus lados y el vértice coincidirían. Por eso, en algunos textos se dice que dos ángulos son congruentes si al superponer el uno sobre el otro ellos coinciden completamente.

Gráficamente señalamos los ángulos congruentes como se muestra en la Figura 7.2.



$\angle A \cong \angle B$ $\angle \alpha \cong \angle \beta$ $\angle AOB \cong \angle COD$

Figura 7.2

Construcción 7.1

¿Cómo trazar un ángulo congruente con un ángulo dado?

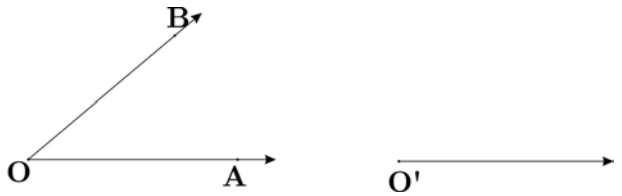
Dado el $\angle AOB$, para trazar otro $\angle C'O'D'$ congruente con él, procedemos como sigue:

1. Utilizando la regla, trazamos una semirrecta con origen en O', que será uno de los lados del ángulo a trazar.

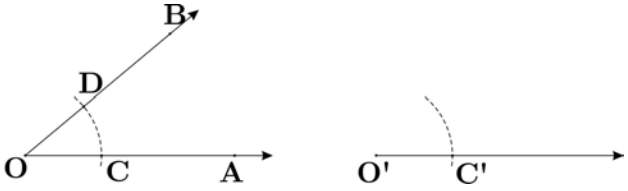
2. En el $\angle AOB$ colocamos la punta del compás en O y trazamos un arco que corte los dos lados del ángulo en puntos que llamaremos C y D. Con la misma abertura y colocando la punta del compás en O', trazamos un arco que corte la semirrecta en un punto que llamaremos C'.

3. Colocamos la punta del compás en C y abrimos el compás hasta que el otro extremo coincida con D. Conservando la abertura del compás, colocamos la punta en C' y trazamos un arco que corte al que habíamos trazado anteriormente, en un punto que llamaremos D'.

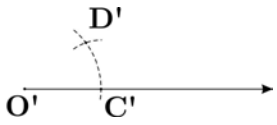
4. Con la regla trazamos la semirrecta $\overrightarrow{O'D'}$. El $\angle C'O'D'$ es congruente con el $\angle AOB$.



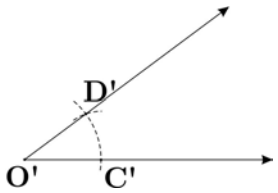
Paso 1



Paso 2



Paso 3



Paso 4
$\angle C'O'D' \cong \angle AOB$

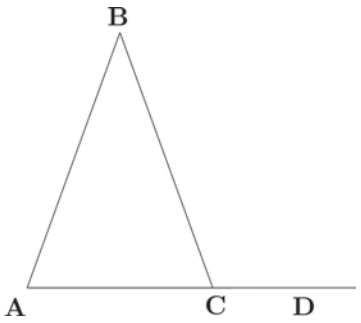
Figura 7.3

Nota 7.2

Cuando usamos este método, también decimos que hemos trasladado el ángulo $\angle AOB$.

Ejemplo 7.1

En cada numeral, trazar un ángulo congruente con el respectivo ángulo de la Figura 7.4.

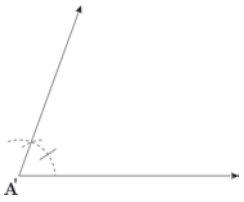


1. $\angle A$
2. $\angle BCD$
3. $\angle B$.

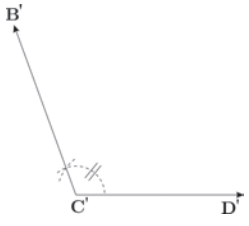
Figura 7.4

Solución

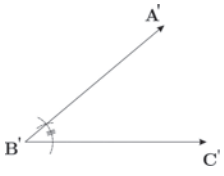
Trazamos los ángulos congruentes con los ángulos dados, como se muestra en la Figura 7.5.



$\angle A' \cong \angle A$



$\angle B'C'D' \cong \angle BCD$



$\angle B' \cong \angle B$

Figura 7.5

Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz de un ángulo** es una semirrecta con origen en el vértice del ángulo, que lo divide en dos ángulos congruentes.

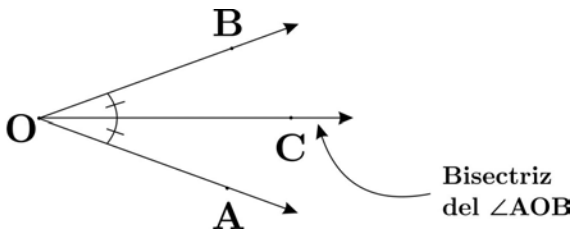


Figura 7.6

La semirrecta $\overrightarrow{OC}$ de la Figura 7.6, que es la bisectriz, divide al $\angle AOB$ en dos ángulos congruentes, es decir,

$$\angle AOC \cong \angle BOC.$$

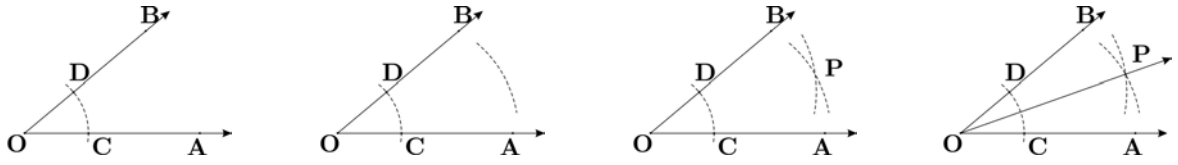
Comprobar, usando el transportador, que efectivamente $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz de $\angle AOB$ en la Figura 7.6.

Construcción 7.2

¿Cómo trazar la bisectriz de un ángulo?

Para trazar la bisectriz del $\angle AOB$, usando regla y compás, procedemos como sigue:

1. Colocamos la punta del compás en el vértice O y con una abertura conveniente trazamos un arco que corte los dos lados del ángulo en dos puntos que llamaremos C y D.
2. Colocamos la punta del compás en C y trazamos un arco que quede entre los dos lados del ángulo.
3. Colocamos la punta del compás en D y, con la misma abertura del Paso 2., trazamos un arco que corte al arco anterior en un punto que llamaremos P.
4. Con la regla trazamos la semirrecta $\overrightarrow{OP}$, que es la bisectriz del $\angle AOB$.



Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4

Figura 7.7

Ejemplo 7.2

Consideremos la Figura 7.4.

1. Usando regla y compás trazar la bisectriz $\overrightarrow{BE}$ del $\angle ABC$.

2. Usando el transportador encontrar $m(\angle BEA)$ y $m(\angle BEC)$.

3. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en dos segmentos congruentes $\overline{AF}$ y $\overline{FC}$. ¿Qué podemos decir de los puntos E y F?

Solución

1. Usando regla y compás trazamos la bisectriz $\overrightarrow{BE}$ del $\angle ABC$, como se muestra en la Figura 7.8.

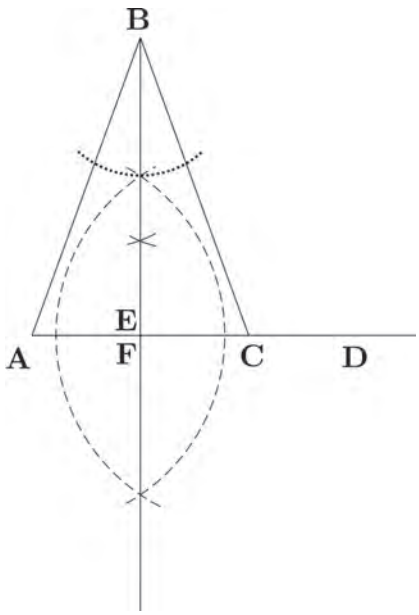


Figura 7.8

2. $m(\angle BEA) = 90°$ y $m(\angle BEC) = 90°$.

3. Dividimos el segmento $\overline{AC}$ en dos segmentos congruentes $\overline{AF}$ y $\overline{FC}$, hallando el punto medio F del segmento $\overline{AC}$, como se muestra en la Figura 7.8.

   Los puntos E y F coinciden.

Ejercicios propuestos

1. Trazar un ángulo congruente con el $\angle AOB$ y otro congruente con $\angle COD$ de la Figura 7.9.

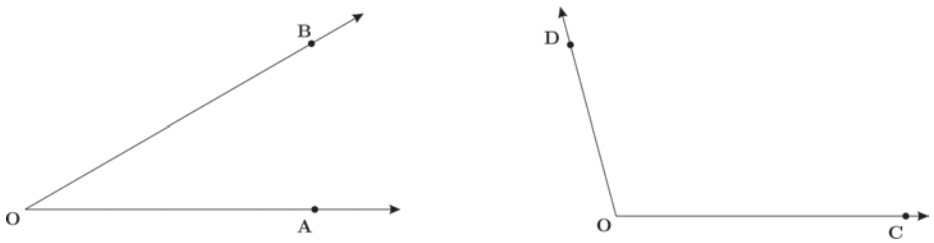


Figura 7.9

2. Consideremos la Figura 7.10.

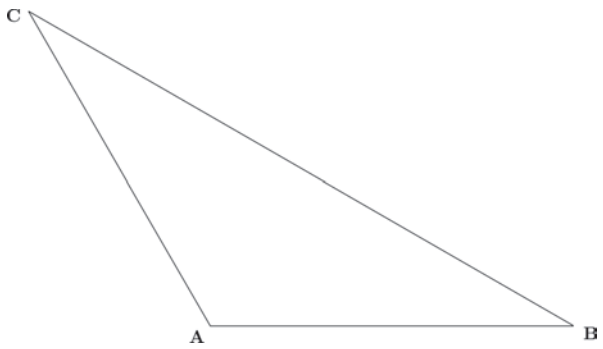


Figura 7.10

   (a) Trazar un ángulo $\angle AOB$ congruente con $\angle A$.

   (b) A partir de la semirrecta $\overrightarrow{OB}$, a la izquierda de $\overrightarrow{OB}$, trazar un ángulo $\angle BOC$ congruente con $\angle B$.

   (c) A partir de la semirrecta $\overrightarrow{OC}$, a la izquierda de $\overrightarrow{OC}$, trazar un ángulo $\angle COD$ congruente con $\angle C$.

   (d) ¿Qué podemos decir del ángulo $\angle AOD$?

3. Usando la regla y el compás trazar la bisectriz de un ángulo llano. Usando el transportador medir cada uno de los dos ángulos que resultan.

4. Trazar la bisectriz de cada uno de los ángulos de la Figura 7.9.

Respuestas

1. Los ángulos pedidos se muestran en la Figura 7.11.

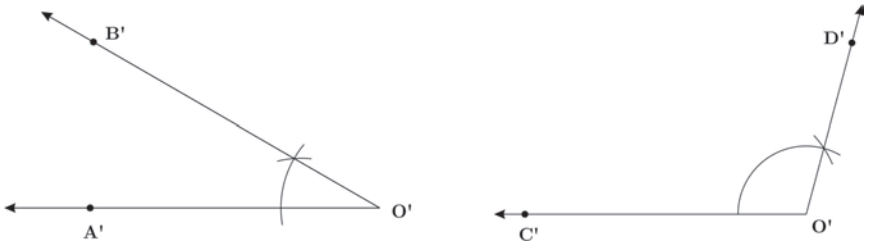


Figura 7.11

2. Los ángulos pedidos se muestran en la Figura 7.12.

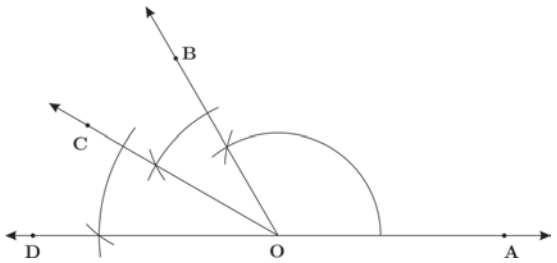


Figura 7.12

El ángulo $\angle AOD$ es un ángulo llano.

3. En la Figura 7.13 se muestra la bisectriz $\overrightarrow{OD}$ de un ángulo llano $\angle AOB$.

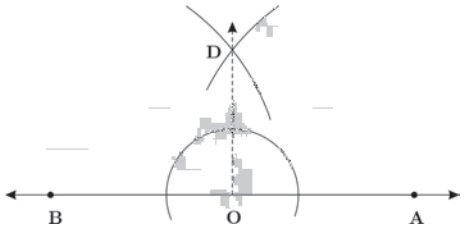


Figura 7.13

Cada uno de los ángulos resultantes mide 90°.

4. En la Figura 7.14 se muestran la bisectrices pedidas.

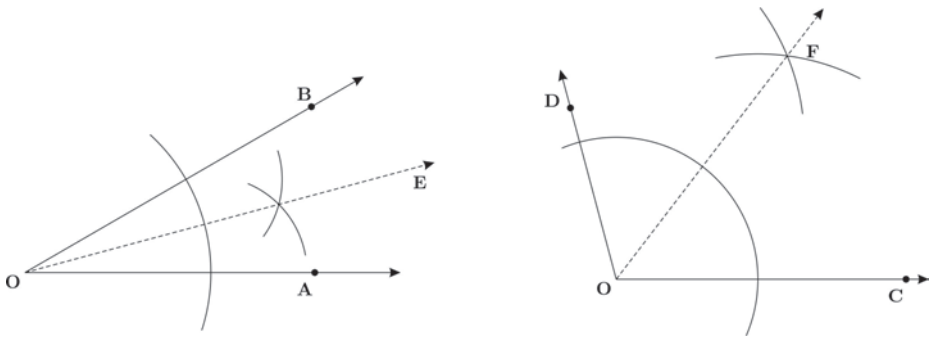


Figura 7.14

Lección 8

Operaciones con ángulos

En esta lección veremos las operaciones de suma y resta de ángulos y el producto de un ángulo por un número real positivo.

Así como realizamos operaciones con segmentos de recta, podemos definir las siguientes operaciones con ángulos:

Suma de ángulos

Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ semirrectas coplanares con el mismo origen O, como se muestra en la Figura 8.1.

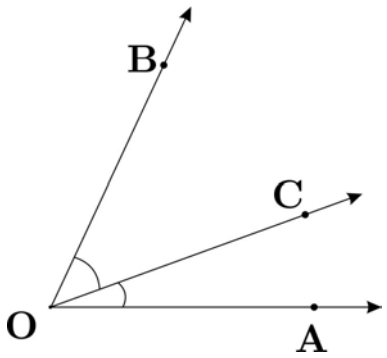


Figura 8.1

La medida del ángulo $\angle AOB$ se obtiene sumando las medidas de los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$, así

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle COB).$$

Se dice que el ángulo $\angle AOB$ es la suma de los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$ y escribimos

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Si lo que queremos es sumar dos ángulos de un mismo plano $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, los trasladamos de tal forma que tengan el mismo vértice y un lado común intermedio, como se muestra en la Figura 8.2 y procedemos como acabamos de explicar para hallar la suma.

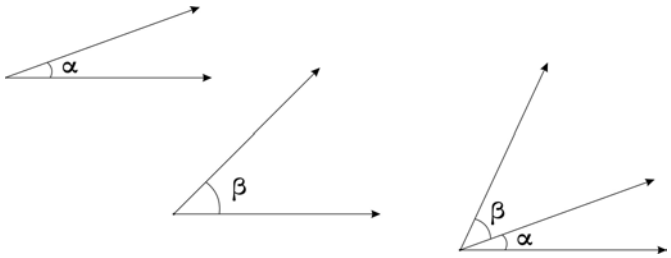


Figura 8.2

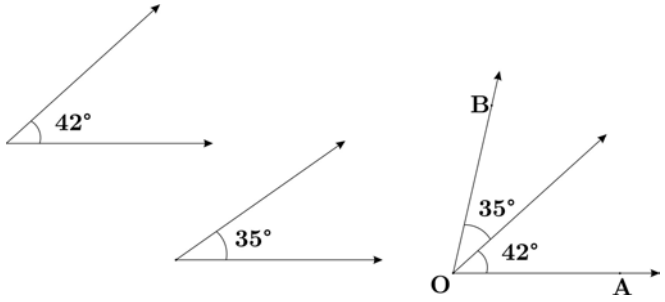
Ejemplo 8.1

Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son dos ángulos de un mismo plano cuyas medidas son 42° y 35° respectivamente, hallar $\angle AOB = \angle\alpha + \angle\beta$ y su medida.

Solución

Para sumar los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ los trasladamos de tal manera que tengan el mismo vértice y un lado común como se muestra en la Figura 8.3. Entonces

$$\angle AOB = \angle\alpha + \angle\beta$$



$$m(\angle AOB) = m(\angle\alpha) + m(\angle\beta) = 42° + 35° = 77°$$

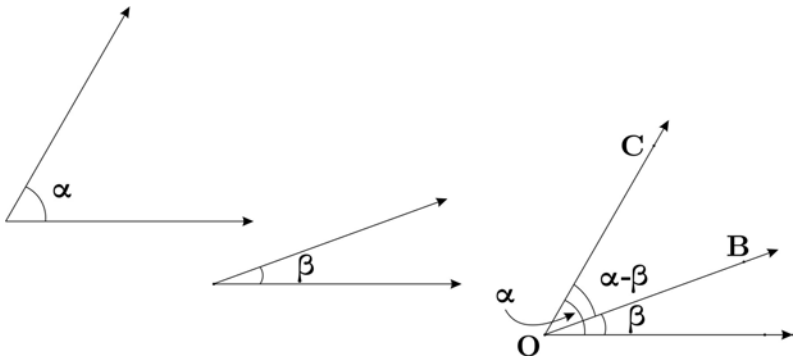
Figura 8.3

Procediendo de la misma forma podemos sumar 3 o más ángulos.

Resta de ángulos

Para restar dos ángulos de un mismo plano, $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, tales que $m(\angle\alpha)$ sea mayor que $m(\angle\beta)$, los trasladamos como se muestra en la Figura 8.4. El ángulo diferencia es el ángulo $\angle BOC$, y así

$$\angle BOC = \angle\alpha - \angle\beta.$$



$$m(\angle BOC) = m(\angle\alpha) - m(\angle\beta)$$

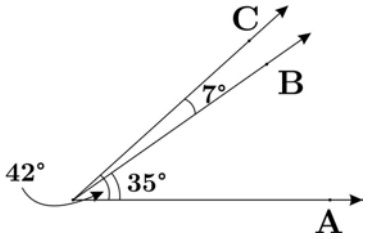
Figura 8.4

Ejemplo 8.2

Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ los ángulos del Ejemplo 8.1. Hallar $\angle BOC = \angle\alpha - \angle\beta$ y su medida.

Solución

Trasladamos los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ como se muestra en la Figura 8.5.



$$\angle BOC = \angle\alpha - \angle\beta$$

$$m(\angle BOC) = m(\angle\alpha) - m(\angle\beta) = 42° - 35° = 7°$$

Figura 8.5

Producto de un ángulo por un número real positivo

El producto de un ángulo $\angle\alpha$ por un número real positivo r es el ángulo $r(\angle\alpha)$ cuya medida es $r(m(\angle\alpha))$.

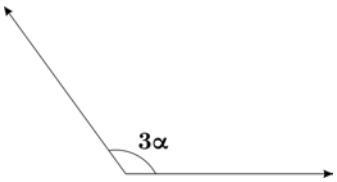
Ejemplo 8.3

Sean $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ los ángulos del Ejemplo 8.1. Hallar $3\,(\angle\alpha)$ y $\frac{3}{5}\,(\angle\beta)$ y sus medidas.

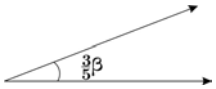
Solución

El ángulo $3\,(\angle\alpha)$ es el ángulo cuya medida es $3m(\angle\alpha) = 3(42°) = 126°$ y el ángulo $\frac{3}{5}\,(\angle\beta)$ es el ángulo cuya medida es $\frac{3}{5}\,(m(\angle\beta)) = \frac{3}{5}\,(35°) = \frac{105°}{5} = 21°$.

Usamos el transportador para trazar estos ángulos.



$m(3\angle\alpha) = 126°$



$m\left(\frac{3}{5}\angle\beta\right) = 21°$

Figura 8.6

Nota 8.1

Para simplificar la escritura utilizaremos la notación de ángulos para representar tanto el nombre del ángulo como su medida. En cada caso, el texto completo nos va a permitir interpretar correctamente en que sentido se utilizan los símbolos.

Por ejemplo, podemos escribir $\angle a = 20°$, para decir que la medida del ángulo a es igual a $20°$, en lugar de escribir $m(\angle a) = 20°$. También podremos escribir $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$, para indicar que la suma de las medidas de $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ es $180°$.

De la misma manera, cuando en una gráfica escribimos un número en grados en un ángulo, estamos diciendo que esa es la medida del ángulo.

Por ejemplo, en la Figura 8.7, el ángulo AOB mide $72°$, y podemos escribir $\angle AOB = 72°$, en vez de $m(\angle AOB) = 72°$.

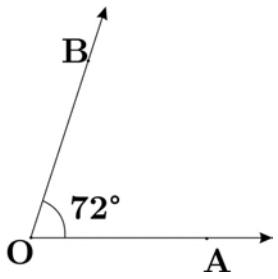


Figura 8.7

Ejemplo 8.4

Si $\angle\alpha = 43°$ y $\angle\gamma = 92°$, hallar:

1. $\angle\gamma - \angle\alpha$ y su medida.
2. $3\angle\alpha - \frac{1}{2}\angle\gamma$ y su medida.

Solución

1. $\angle\gamma - \angle\alpha$ es el ángulo cuya medida es $m(\angle\gamma) - m(\angle\alpha) = 92° - 43° = 49°$.

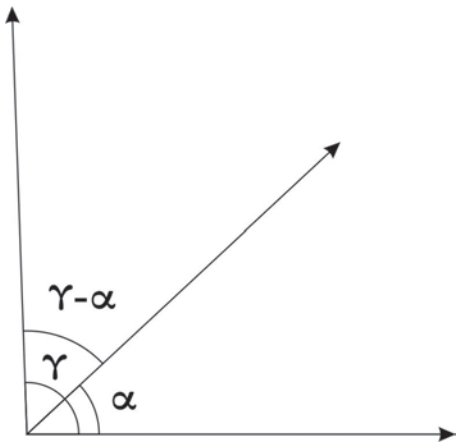


Figura 8.8

2. $3\angle\alpha$ es el ángulo cuya medida es $3m(\angle\alpha) = 3(43°) = 129°$ y

   $\frac{1}{2}\angle\gamma$ es el ángulo cuya medida es $\frac{1}{2}m(\angle\gamma) = \frac{1}{2}(92°) = 46°$.

   Entonces,

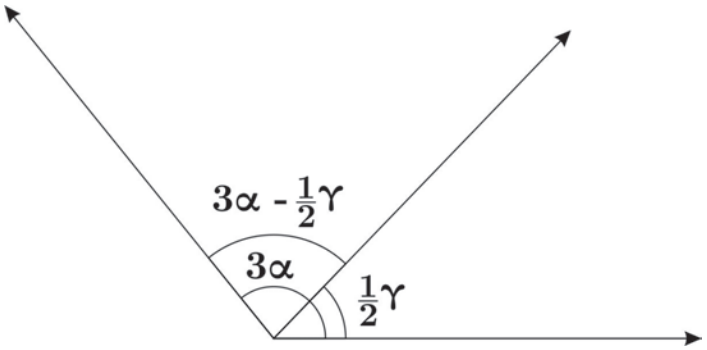


Figura 8.9

   $3\angle\alpha - \frac{1}{2}\angle\gamma = 129° - 46° = 83°$.

Ejercicios propuestos

1. Trazar ángulos cuyas medidas sean: $\angle\alpha = 45°$, $\angle\beta = 12°$, $\angle\gamma = 140°$ y $\angle\delta = 69°$.
2. Usando los ángulos del Ejercicio 1, hallar:
   (a) $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\delta$ y su medida.
   (b) $\angle\gamma - \angle\delta$ y su medida.
   (c) $\angle\gamma - 2\angle\alpha$ y su medida.
   (d) $\frac{1}{3}\angle\alpha + \frac{2}{3}\angle\delta + 2\angle\beta$ y su medida.

(e) $\angle\alpha + \angle\delta - \frac{1}{7}\angle\gamma$ y su medida.

Respuestas

1. En la Figura 8.10 se muestran los ángulos pedidos.

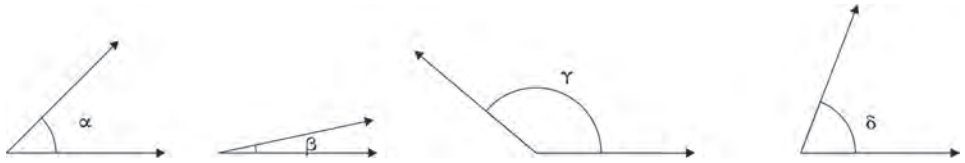


Figura 8.10

2. (a) En la Figura 8.11 se muestra el ángulo pedido cuya medida es 126°.

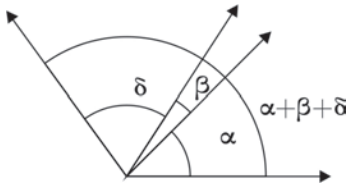


Figura 8.11

(b) En la Figura 8.12 se muestra el ángulo pedido cuya medida es 71°.

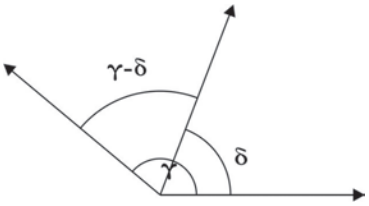


Figura 8.12

(c) En la Figura 8.13 se muestra el ángulo pedido cuya medida es 50°.

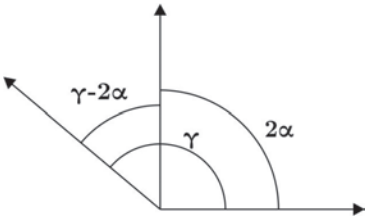


Figura 8.13

(d) En la Figura 8.14 se muestra el ángulo pedido cuya medida es 85°.

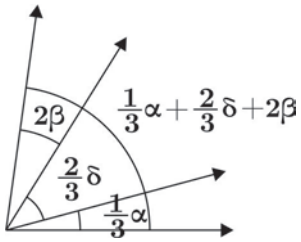


Figura 8.14

(e) En la Figura 8.15 se muestra el ángulo pedido cuya medida es 94°.

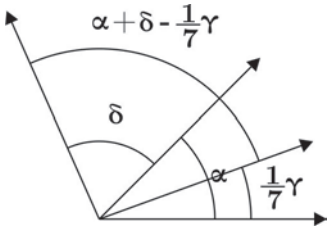


Figura 8.15

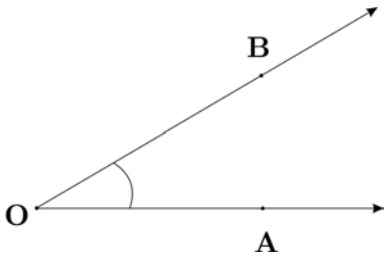
Lección 9

Clasificación de ángulos

En esta lección veremos la clasificación de ángulos según su medida.

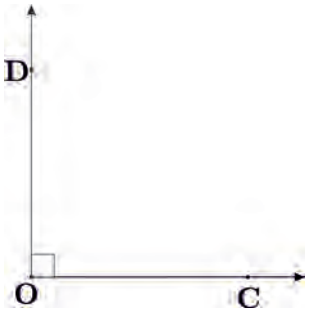
Los ángulos se clasifican según su medida en:

- **Ángulo agudo**: es el ángulo que mide menos de 90°.
- **Ángulo recto**: es el ángulo que mide 90°.
- **Ángulo obtuso**: es el ángulo que mide más de 90°.
- **Ángulo llano**: es el ángulo cuya medida es 180°.



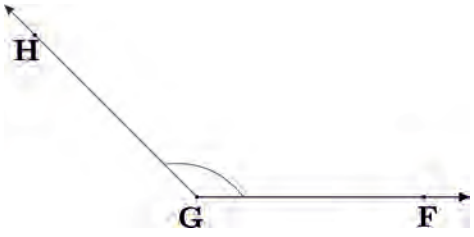
$\angle AOB$

Ángulo agudo



$\angle COD$

Ángulo recto



$\angle FGH$

Ángulo obtuso

$\angle IJK$

Ángulo llano

Figura 9.1

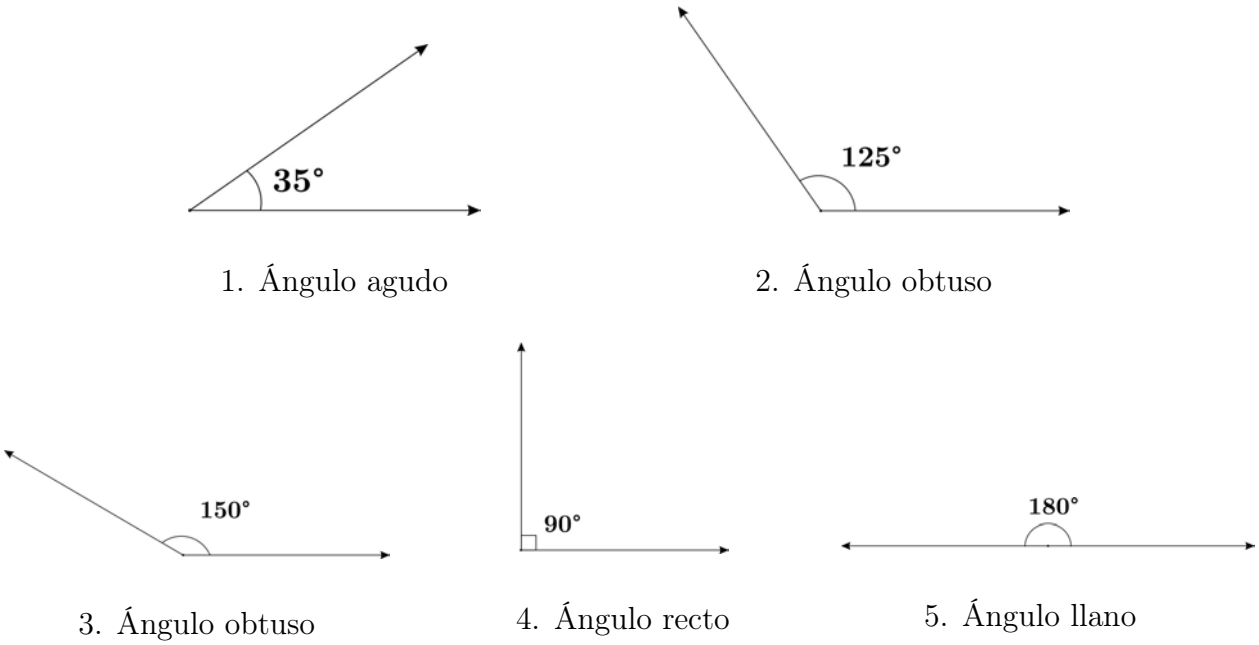
Ejemplo 9.1

Trazar, usando regla y transportador, y clasificar según su medida los ángulos que miden:

1. 35°.
2. 125°.
3. 150°.
4. 90°.
5. 180°.

Solución

Usando regla y transportador tracemos los ángulos:



1. Ángulo agudo
2. Ángulo obtuso
3. Ángulo obtuso
4. Ángulo recto
5. Ángulo llano

Figura 9.2

El ángulo en 1. es agudo porque mide menos de 90°, los ángulos en 2. y en 3. son obtusos porque miden más de 90°, el ángulo en 4. es recto porque su medida es 90° y el ángulo en 5. es llano porque mide 180°.

Ejemplo 9.2

Hallar la medida de cada uno de los ángulos de la Figura 9.3, si $\angle AOC = 90°$, $\angle AOB = (2x)°$ y $\angle BOC = (3x + 5)°$.

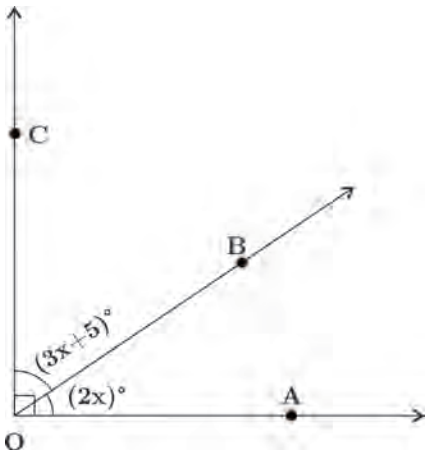


Figura 9.3

Solución

Como los ángulos de la Figura 9.3 forman un ángulo recto, la suma de sus medidas es 90°. Luego,

$$2x + (3x + 5) = 90.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$5x = 85$$

$$x = 85/5$$

$$x = 17.$$

Sustituyendo x en las expresiones dadas en la Figura 9.3, hallamos la medida de los dos ángulos:

$$2(17) = 34 \qquad \text{y} \qquad 3(17) + 5 = 51 + 5 = 56.$$

Luego, los ángulos de la Figura 9.3 miden 34° y 56°.

Ejemplo 9.3

Hallar $\angle AOB$ y $\angle COB$ de la Figura 9.4, si $\angle AOB = (10x + 7)°$, $\angle COB = (7x + 3)°$ y los puntos A, O y C están en la misma recta.

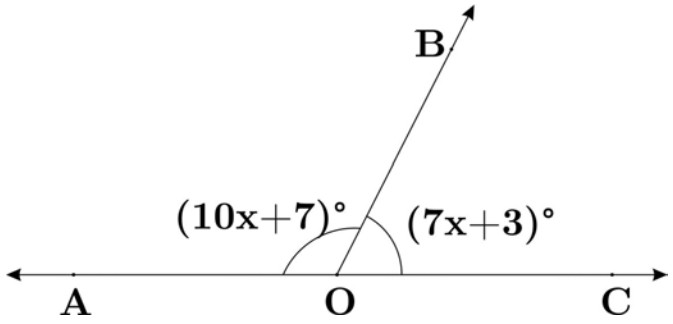


Figura 9.4

Solución

Como $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos con el mismo vértice y un lado común intermedio y A, O y C son colineales, entonces la suma de sus medidas es 180°. Obtenemos así la ecuación

$$(10x + 7) + (7x + 3) = 180.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}(10x + 7) + (7x + 3) &= 180\\ 10x + 7 + 7x + 3 &= 180\\ 17x + 10 &= 180\\ 17x &= 170\\ x &= 10.\end{aligned}$$

Para hallar las medidas de los ángulos de la Figura 9.4 reemplazamos x por 10 en cada una de las expresiones y obtenemos $10(10) + 7 = 107$ y $7(10) + 3 = 73$.

Luego, la medida del $\angle AOB$ es 107° y la del $\angle BOC$ es 73°.

Ejemplo 9.4

En la Figura 9.5, $\angle AOB$ es un ángulo recto y $\overrightarrow{OD}$ es la bisectriz de $\angle COE$. Si $\angle AOC = 20°$ y $\angle EOB = 32°$, hallar $\angle DOB$.

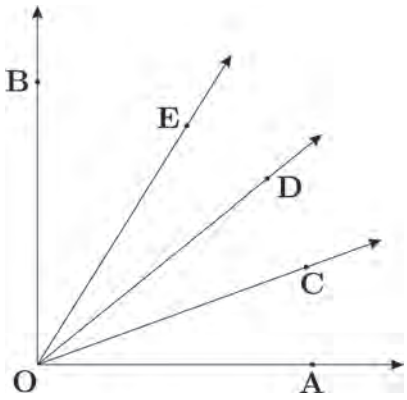


Figura 9.5

Solución

Como $\angle AOB = 90°$ entonces

$$\angle AOC + \angle COE + \angle EOB = \angle AOB = 90° \tag{9.1}$$

Como $\angle AOC = 20°$ y $\angle EOB = 32°$, sustituyendo en 9.1 podemos hallar $\angle COE$:

$$\begin{aligned}20° + \angle COE + 32° &= 90°\\ \angle COE &= 90° - 20° - 32°\\ &= 38°.\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{OD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle COE$ entonces $\angle COD \cong \angle DOE$ y así

$$\angle DOE = \frac{38^\circ}{2} = 19^\circ.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\angle DOB &= \angle DOE + \angle EOB \\ &= 19^\circ + 32^\circ \\ &= 51^\circ.\end{aligned}$$

Por tanto, $\angle DOB = 51^\circ$.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 9.6, AD, BE y CF son rectas que se cortan en O y $\angle BOC$ es un ángulo recto.

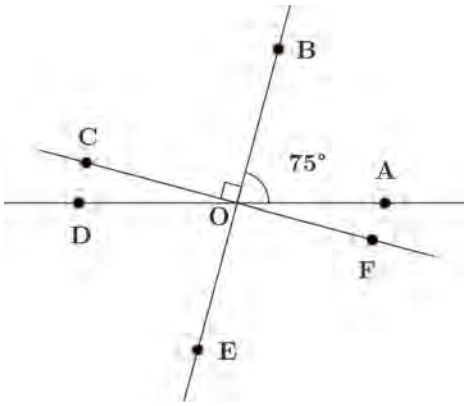


Figura 9.6

   (a) Nombrar cuatro ángulos rectos.

   (b) Nombrar cuatro ángulos agudos.

   (c) Nombrar cuatro ángulos obtusos.

2. Si en la Figura 9.7, $\angle AOD$ es un ángulo llano y $\angle AOB = x$, $\angle BOC = 5x$ y $\angle COD = 4x$, hallar la medida de cada uno de estos ángulos.

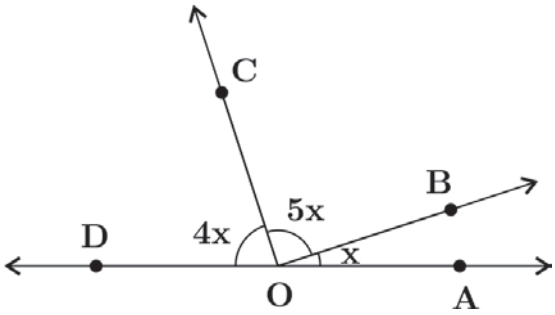


Figura 9.7

3. En la figura 9.8, $\angle AOC$ es un ángulo recto y las medidas de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ están en la razón 7 a 8. Hallar la medida de cada uno de estos ángulos.

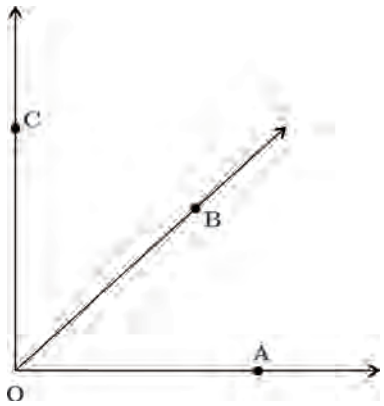


Figura 9.8

Respuestas

1. (a) $\angle FOB$, $\angle BOC$, $\angle COE$ y $\angle EOF$.

   (b) $\angle FOA$, $\angle AOB$, $\angle COD$ y $\angle DOE$.

   (c) $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle DOF$ y $\angle EOA$.

2. $\angle AOB = 18°$, $\angle BOC = 90°$ y $\angle COD = 72°$.

3. $\angle AOB = 42°$, $\angle BOC = 48°$.

Lección 10

Ángulos complementarios y suplementarios

Dados dos ángulos, en esta lección veremos cómo se llaman de acuerdo a la suma de sus medidas.

Teniendo en cuenta la suma de sus medidas, dos ángulos son:

- **Ángulos complementarios**: si la suma de sus medidas es 90°.

  Cada ángulo se denomina **complemento** del otro.

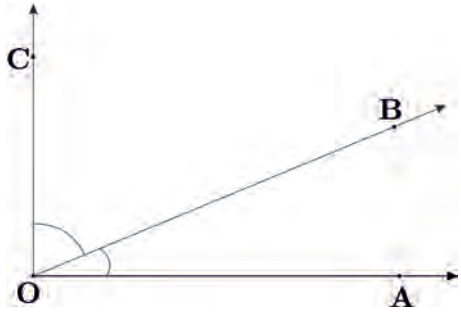


Figura 10.1

En la Figura 10.1,

$\angle AOB + \angle BOC = 90°$

$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos complementarios

$\angle AOB$ es el complemento de $\angle BOC$

$\angle BOC$ es el complemento de $\angle AOB$

- **Ángulos suplementarios**: si la suma de sus medidas es 180°.

  Cada ángulo se denomina **suplemento** del otro.

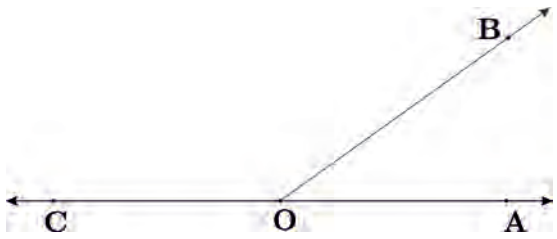


Figura 10.2

En la Figura 10.2,

$\angle AOB + \angle BOC = 180°$

$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos suplementarios

$\angle AOB$ es el suplemento de $\angle BOC$

$\angle BOC$ es el suplemento de $\angle AOB$

Ejemplo 10.1

1. Si α es un ángulo que mide 32°, hallar su complemento y su suplemento. Usando regla y transportador, dibujar los tres ángulos.
2. Hallar el ángulo cuya medida es el doble de la de su suplemento.

Solución

1. Llamemos $\angle\beta$ el complemento de $\angle\alpha$. Entonces,

$$\angle\alpha + \angle\beta = 90°.$$

Como $\angle\alpha = 32°$, despejemos $\angle\beta$ de la ecuación anterior y reemplacemos $\angle\alpha$:

$$\begin{aligned}\angle\beta &= 90° - \angle\alpha \\ &= 90° - 32° \\ &= 58°.\end{aligned}$$

Llamemos $\angle\theta$ el suplemento de $\angle\alpha$. Entonces,

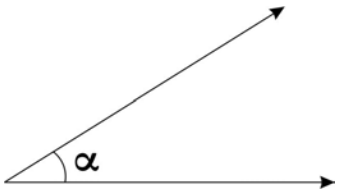
$$\angle\alpha + \angle\theta = 180°.$$

Despejemos $\angle\theta$ de la ecuación anterior y reemplacemos $\angle\alpha$:

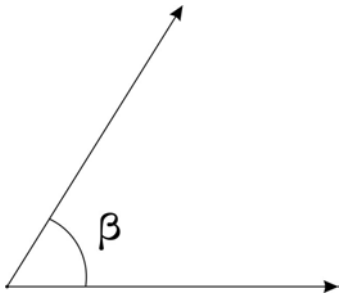
$$\begin{aligned}\angle\theta &= 180° - \angle\alpha \\ &= 180° - 32° \\ &= 148°.\end{aligned}$$

Luego, el complemento de $\angle\alpha$ es un ángulo cuya medida es $58°$ y su suplemento es un ángulo que mide $148°$.

Utilizando regla y transportador trazamos los tres ángulos:

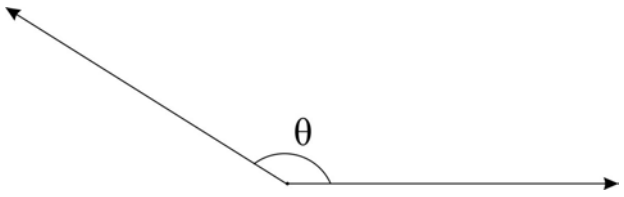


$\angle\alpha = 32°$



$\angle\beta = 58°$

Complemento de $\angle\alpha$



$\angle\theta = 148°$

Suplemento de $\angle\alpha$

Figura 10.3

2. Llamemos x a la medida del suplemento, entonces $2x$ es la medida del ángulo pedido y la suma de sus medidas es igual a $180°$. Esto es,

$$x + 2x = 180.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $3x = 180$ o sea $x = 60$.

Luego, la medida del ángulo pedido es $2(60°) = 120°$ y la de su suplemento es $180° - 120°$, es decir $60°$.

Ejemplo 10.2

Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos tales que $\angle\alpha = 75°$, hallar la medida de $\angle\beta$ si:

1. $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos complementarios.
2. $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos suplementarios.
3. $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos congruentes.

Solución

1. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son complementarios, entonces $\angle\alpha + \angle\beta = 90°$. Luego,

$$\angle\beta = 90° - \angle\alpha = 90° - 75° = 15°.$$

2. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son suplementarios entonces $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$ y así

$$\angle\beta = 180° - \angle\alpha = 180° - 75° = 105°.$$

3. Si $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son congruentes, entonces tienen la misma medida y así

$$\angle\beta = 75°.$$

Ejemplo 10.3

En la Figura 10.4 si $\angle\alpha = 126°$, hallar la medida de $\angle\beta$ y $\angle\theta$.

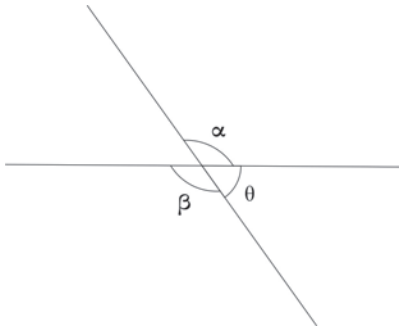


Figura 10.4

Solución

En la Figura 10.4 vemos que $\angle\alpha$ y $\angle\theta$ son suplementarios. Luego, $\angle\alpha+\angle\theta = 180°$ y así

$$\angle\theta = 180° - \angle\alpha = 180° - 126° = 54°.$$

Además, observamos que $\angle\theta$ y $\angle\beta$ son también suplementarios. Luego, $\angle\theta + \angle\beta = 180°$ y por tanto,

$$\angle\beta = 180° - \angle\theta = 180° - 54° = 126°.$$

Luego, los ángulos $\angle\theta$ y $\angle\beta$ miden $54°$ y $126°$ respectivamente.

Observemos que $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ tienen la misma medida, esto es, son congruentes.

Ejemplo 10.4

La medida de un ángulo es igual a $5/4$ de la medida de su suplemento. Hallar los dos ángulos.

Solución

Sea $\angle\alpha$ el ángulo y sea $\angle\beta$ su suplemento. Entonces

$$\angle\alpha + \angle\beta = 180° \tag{10.1}$$

Como $\angle\alpha = \frac{5}{4}\angle\beta$, sustituyendo en 10.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{5}{4}\angle\beta + \angle\beta &= 180° \\
\frac{9}{4}\angle\beta &= 180° \\
\angle\beta &= \frac{4}{9}(180°) \\
&= 80°.
\end{aligned}$$

Luego, $\angle\alpha = 180° - 80° = 100°$.

Por tanto, el ángulo pedido y su suplemento miden $100°$ y $80°$ respectivamente.

Axioma 10.1

Ángulos que tienen complementos o suplementos congruentes, son congruentes.

Ejemplo 10.5

En la Figura 10.5, los ángulos $\angle PAM$ y $\angle MAJ$ son complementarios y $\angle KAJ$ y $\angle MAJ$ son complementarios. ¿Qué podemos deducir de los ángulos $\angle KAJ$ y $\angle PAM$?

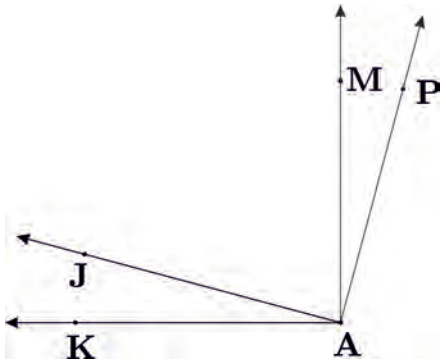


Figura 10.5

Solución

Como el ángulo $\angle MAJ$ es el complemento del ángulo $\angle PAM$ y a la vez es el complemento de $\angle KAJ$, entonces $\angle PAM$ y $\angle KAJ$ tienen el mismo complemento. Luego, $\angle PAM \cong \angle KAJ$ por el Axioma 10.1.

Ejercicios propuestos

1. El complemento de un ángulo mide $10°$ menos que la quinta parte de su suplemento. Obtener la medida del ángulo.
2. En la Figura 10.6, si AC y BD son dos rectas que se cortan en O y $\angle AOD = 2\angle AOB$, hallar la medida de $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ y $\angle DOA$.

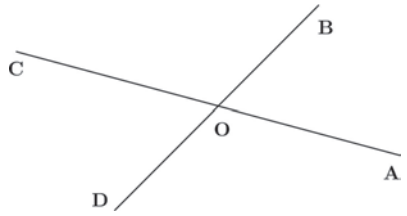


Figura 10.6

3. En la Figura 10.7, los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COA$ son congruentes entre sí. Probar que $\overrightarrow{OD}$, que es la semirrecta opuesta de $\overrightarrow{OA}$, es la bisectriz del ángulo $\angle BOC$.

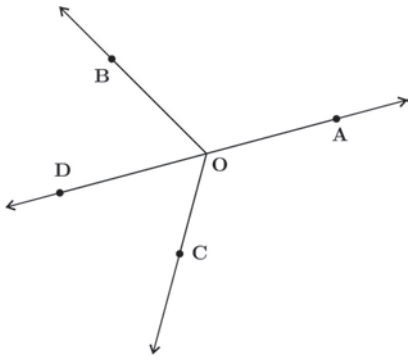


Figura 10.7

Respuestas

1. $80°$.
2. $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 120°$, $\angle COD = 60°$ y $\angle DOA = 120°$.
3. Ayuda: usar el Axioma 10.1.

Lección 11

Otros tipos de ángulos

En esta lección veremos otros tipos de ángulos de acuerdo a la posición relativa de dos ángulos en un plano y algunos teoremas relacionados con dichos ángulos.

De acuerdo a la posición relativa de dos ángulos en un plano, algunos tipos de ángulos son:

- **Ángulos consecutivos**: si tienen el mismo vértice y un lado común intermedio.

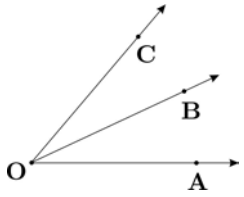


Figura 11.1

En la Figura 11.1,

O vértice común

$\overrightarrow{OB}$ lado común intermedio

$\angle AOB$ y $\angle COB$ son consecutivos.

- **Ángulos adyacentes**: si tienen el mismo vértice, un lado común y los otros dos lados son semirrectas opuestas.

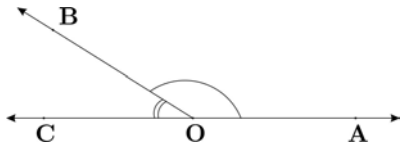


Figura 11.2

En la Figura 11.2,

O vértice común

$\overrightarrow{OB}$ lado común

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ lados sobre la misma recta

$\angle AOB$ y $\angle COB$ son adyacentes.

Observemos que dos ángulos adyacentes son suplementarios y consecutivos.

- **Ángulos opuestos por el vértice**: si tienen el mismo vértice y los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.

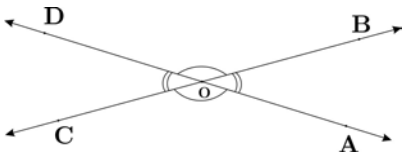


Figura 11.3

En la Figura 11.3,

$\angle AOB$ y $\angle COD$ opuestos por el vértice

$\angle AOC$ y $\angle BOD$ opuestos por el vértice.

Observemos que dos rectas que se cortan en un punto forman cuatro ángulos y cada pareja de estos ángulos no adyacentes son ángulos opuestos por el vértice.

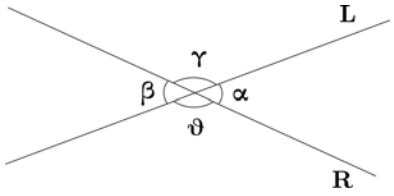


Figura 11.4

En la Figura 11.4,

rectas L y R,

$\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son opuestos por el vértice y

$\angle\gamma$ y $\angle\theta$ son opuestos por el vértice.

Teorema 11.1

Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Prueba

Sean AD y CB dos rectas que se cortan en el punto O, como se muestra en la Figura 11.5.

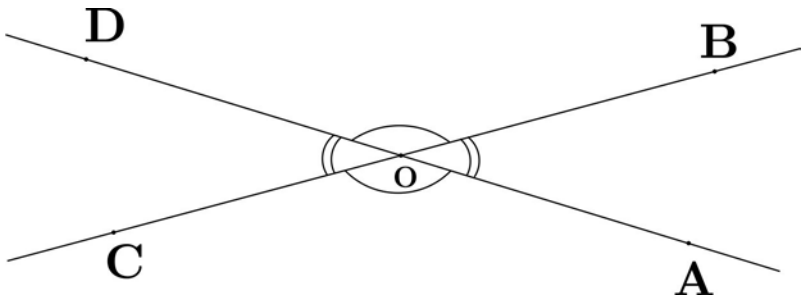


Figura 11.5

Vamos a probar que $\angle AOB \cong \angle COD$.

Como

$\angle BOD$ es el suplemento de $\angle AOB$ porque forman un ángulo llano y

$\angle BOD$ es el suplemento de $\angle COD$ por la misma razón, entonces

$\angle AOB \cong \angle COD$ por tener el mismo suplemento.

Hemos probado que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$, que son opuestos por el vértice, son congruentes.

En forma similar, podemos demostrar que $\angle BOD \cong \angle AOC$.

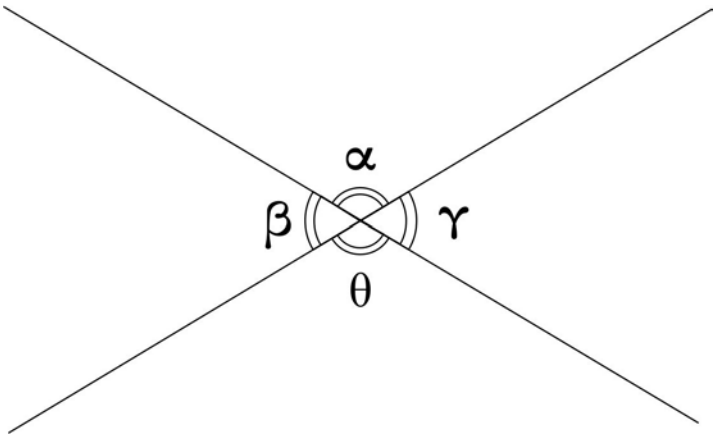
Ejemplo 11.1

1. Si dos rectas se cortan en un punto y la medida de uno de los ángulos es 62º, ¿cuál es la medida de cada uno de los otros ángulos?

2. Si las dos rectas se cortan formando cuatro ángulos congruentes, ¿cuál es la medida de cada uno?

Solución

1. Representemos en la Figura 11.6 las dos rectas que se cortan y nombremos los ángulos por α, β , θ y γ, con $\angle\gamma = 62^o$.



$\angle\gamma = 62^o$

Figura 11.6

Como $\angle\gamma$ es opuesto por el vértice al $\angle\beta$, son congruentes y por tanto tienen la misma medida, es decir, $\angle\beta = 62^o$.

Los ángulos γ y α son adyacentes y por tanto la suma de sus medidas es 180^o. Luego, $\angle\alpha = 180^o - \angle\gamma = 180^o - 62 = 118^o$.

Como los ángulos α y θ son opuestos por el vértice, son congruentes y sus medidas son iguales. Luego, $\angle\theta = 118^o$.

2. Representemos en la Figura 11.7 las dos rectas que se cortan y nombremos los ángulos por α, β , θ y γ.

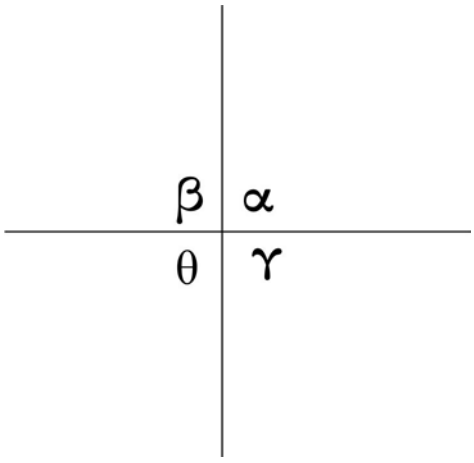


Figura 11.7

$\angle\alpha \cong \angle\beta$ según el enunciado y como son ángulos adyacentes, la suma de sus medidas es 180º, y por tanto, cada uno mide 90º.

$\angle\alpha \cong \angle\theta$ por ser opuestos por el vértice, entonces tienen la misma medida, o sea 90º.

$\angle\beta \cong \angle\gamma$ por la misma razón anterior, y por tanto $\angle\gamma = 90º$.

O sea, los cuatro ángulos son rectos.

Teorema 11.2

Las bisectrices de ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.

Prueba

Sean $\angle AOB$ y $\angle COD$ ángulos opuestos por el vértice y $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ sus correspondientes bisectrices, como se muestra en la Figura 11.8.

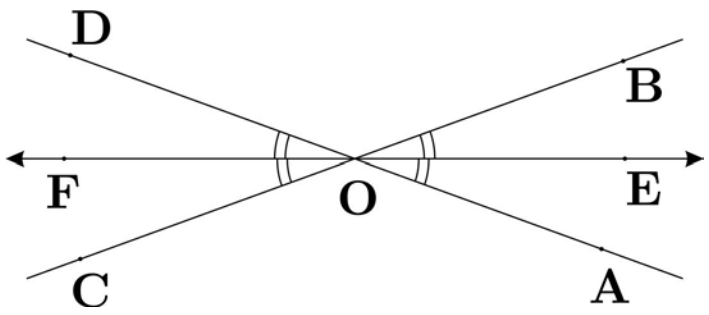


Figura 11.8

Debemos probar que $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ están en línea recta.

$\angle AOE \cong \angle EOB \cong \angle DOF \cong \angle FOC$ por ser ángulos formados por las bisectrices de ángulos congruentes.

$\angle AOE + \angle EOB + \angle BOD = 180º$ porque AD es una línea recta.

$\angle DOF + \angle BOD + \angle EOB = 180º$ ya que $\angle AOE \cong \angle DOF$

Por tanto, $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ están en línea recta.

Ejemplo 11.2

Si $\angle\beta$ es el ángulo de la Figura 11.9,

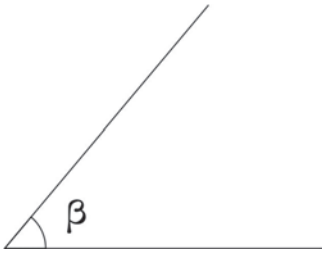


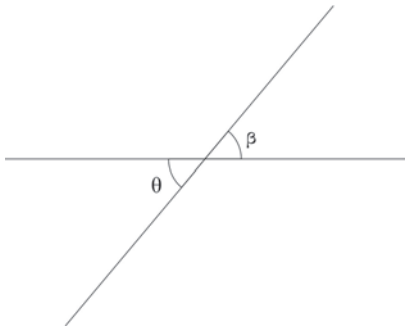
Figura 11.9

1. Dibujar un ángulo $\angle\theta$ tal que $\angle\beta$ y $\angle\theta$ sean opuestos por el vértice.

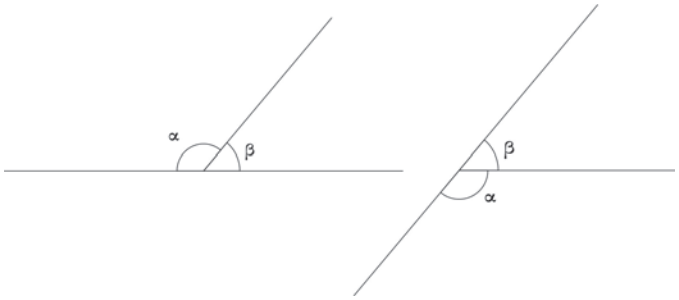
2. Dibujar un ángulo $\angle\alpha$ tal que $\angle\beta$ y $\angle\alpha$ sean adyacentes.

3. Usando regla y compás, trazar las bisectrices de cada uno de los ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\theta$.

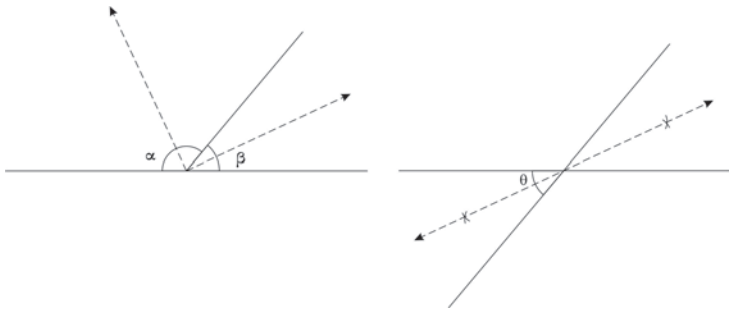
Solución



(a) $\angle\theta$ y $\angle\beta$ opuestos por el vértice



(b) $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ adyacentes



(c) Bisectrices

Figura 11.10

Ejemplo 11.3

Si dos rectas distintas se cortan en un punto y uno de los ángulos que se forman mide x°, escribir en términos de x las medidas de los otros tres ángulos.

Solución

Sean AC y BD rectas que se cortan en el punto O, formando dos pares de ángulos opuestos por el vértice, como se muestra en la Figura 11.11.

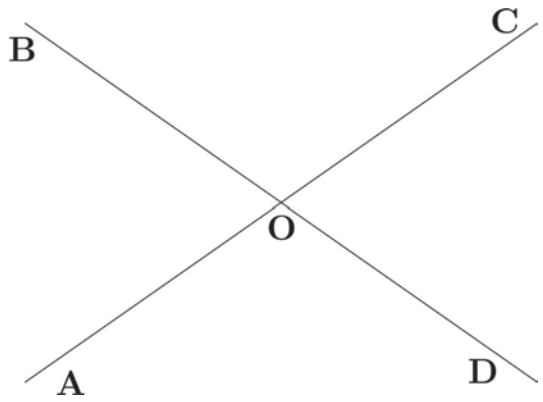


Figura 11.11

Sea $\angle AOB = x^{\circ}$.

Como $\angle AOB \cong \angle COD$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\angle COD = x^{\circ}$.

Como $\angle AOB + \angle BOC = 180^{\circ}$ por ser ángulos adyacentes, entonces

$\angle BOC = 180^{\circ} - \angle AOB = 180^{\circ} - x^{\circ}$.

Como $\angle AOD \cong \angle BOC$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\angle AOD = 180^{\circ} - x^{\circ}$.

Luego, la medida de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ es x° y la de $\angle AOD$ y $\angle BOC$ es $180^{\circ} - x^{\circ}$.

Ejemplo 11.4

En la Figura 11.12,

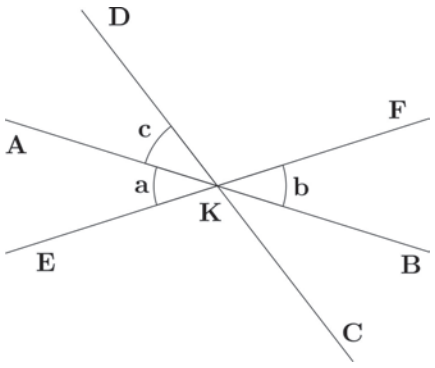


Figura 11.12

AB, CD y EF son rectas que se cortan en el punto K.

Si $\angle a \cong \angle c$, demostrar que $\angle b \cong \angle c$.

Solución

Como $\angle a \cong \angle b$ por ser opuestos por el vértice y como $\angle a \cong \angle c$, entonces $\angle b \cong \angle c$.

Ejemplo 11.5

En la Figura 11.13,

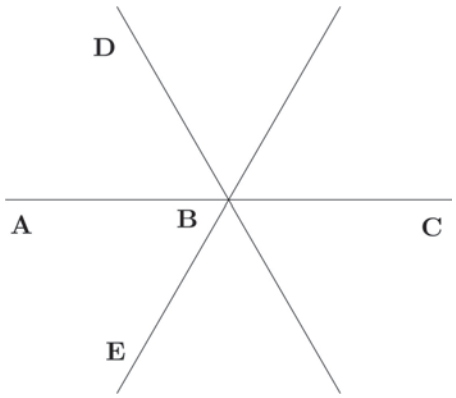


Figura 11.13

A, B y C son puntos colineales y D y E son puntos en los semiplanos determinados por la recta AC, tales que $\angle CBD \cong \angle CBE$, demostrar que $\angle ABD \cong \angle ABE$.

Solución

Como $\angle ABD$ es suplemento de $\angle CBD$ y $\angle ABE$ es suplemento de $\angle CBE$, entonces $\angle ABD \cong \angle ABE$ por tener suplementos congruentes.

Ejemplo 11.6

En la Figura 11.14,

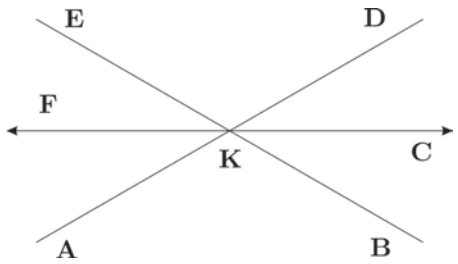


Figura 11.14

AD, BE y CF son rectas que se cortan en el punto K y $\overrightarrow{KC}$ es la bisectriz de $\angle BKD$.

Demostrar que $\overrightarrow{KF}$ es la bisectriz del $\angle AKE$.

Solución

Como

$\angle BKC \cong \angle DKC$ por ser $\overrightarrow{KC}$ la bisectriz de $\angle BKD$,

$\angle EKF \cong \angle BKC$ por ser opuestos por el vértice y

$\angle AKF \cong \angle DKC$ por ser opuestos por el vértice,

entonces

$\angle EKF \cong \angle AKF$.

Luego, $\overrightarrow{KF}$ es la bisectriz de $\angle AKE$.

Ejercicios propuestos

1. Tres rectas se cortan en un mismo punto formando los ángulos a , b , c , d , e y f, como se muestra en la Figura 11.15.

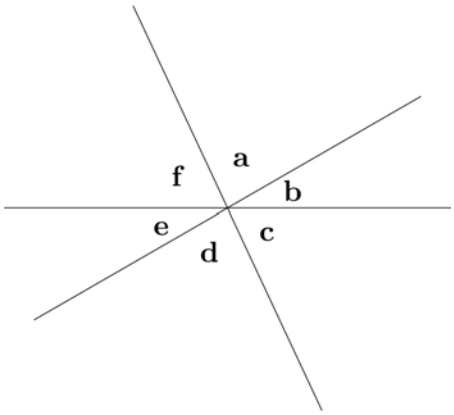


Figura 11.15

   Si $\angle a = 85^o$ y $\angle e = 30^o$, hallar $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ y $\angle f$.

2. Dos ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\theta$ son consecutivos y forman un ángulo que mide 88^o. Si el ángulo $\angle\alpha$ mide 36^o más que el ángulo $\angle\theta$, ¿cuánto mide cada uno?

3. En cada literal, completar la afirmación dada.

   (a) Si los lados de dos ángulos son semirrectas opuestas, los ángulos se llaman _____ .

   (b) Dos ángulos formados por dos semirrectas opuestas y una tercera semirrecta, las tres con el mismo extremo, se llaman _____ .

   (c) Dos ángulos formados por tres semirrectas con el mismo extremo se llaman _____ .

Respuestas

1. $\angle b = 30^o$, $\angle c = 65^o$, $\angle d = 85^o$ y $\angle f = 65^o$.

2. $\angle\alpha = 62^o$ y $\angle\theta = 26^o$.

3. (a) Opuestos por el vértice.

   (b) Adyacentes.

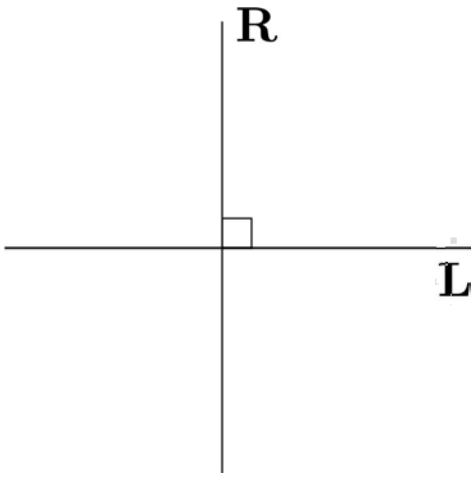
   (c) Consecutivos.

Lección 12

Rectas perpendiculares

En esta lección veremos los conceptos de rectas perpendiculares, distancia de un punto a una recta y mediatriz de un segmento. Mediante construcciones geométricas, utilizando regla y compás, veremos cómo trazar la mediatriz de un segmento y cómo trazar una perpendicular a una recta, que pase por un punto dado.

Si dos rectas L y R en un plano se intersectan formando un ángulo recto, se dice que son **rectas perpendiculares** y escribimos $L \perp R$.



$L \perp R$

Figura 12.1

Si dos rectas son perpendiculares, su punto de intersección se llama **el pie de las perpendiculares**.

Axioma 12.1

Por un punto, ya sea exterior o no a una recta, pasa una perpendicular y sólo una perpendicular a dicha recta.

Ejemplo 12.1

Demostrar que ningún triángulo tiene dos ángulos rectos.

Solución

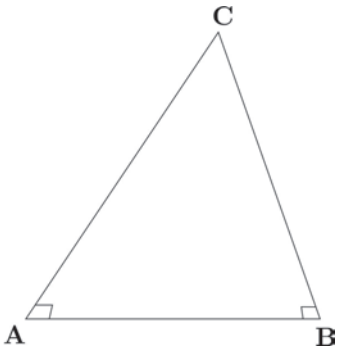


Figura 12.2

En el $\triangle ABC$ si $\angle A$ y $\angle B$ fueran ángulos rectos, entonces tendríamos dos rectas perpendiculares desde el punto C a la recta AB, pero por un punto exterior a una recta pasa una perpendicular y sólo una a dicha recta.

Luego, podemos decir que un $\triangle ABC$ no puede tener más de un ángulo recto.

Distancia de un punto a una recta

La **distancia** de un punto P a una recta L es la medida del segmento que une el punto P con el pie de la perpendicular trazada del punto a la recta.

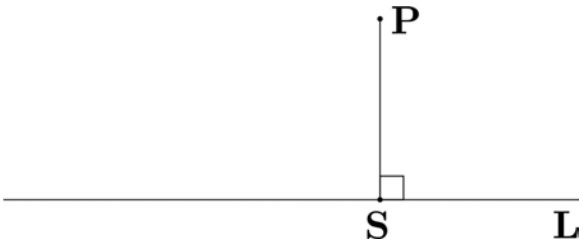


Figura 12.3

En la Figura 12.3, la distancia de P a la recta L es igual a la medida del segmento $\overline{PS}$.

Teorema 12.1

Las bisectrices de ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

Prueba

Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ ángulos adyacentes, $\overrightarrow{OD}$ la bisectriz del $\angle AOB$ y $\overrightarrow{OE}$ la bisectriz del $\angle BOC$, como se muestra en la Figura 12.4.

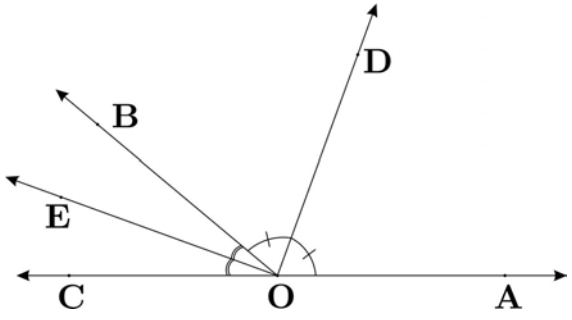


Figura 12.4

Debemos probar que $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$.

$\angle AOD \cong \angle DOB$ por ser $\overrightarrow{OD}$ bisectriz.

$\angle BOE \cong \angle EOC$ por ser $\overrightarrow{OE}$ bisectriz.

Luego,

$\angle AOB = 2\angle DOB$

$\angle BOC = 2\angle BOE.$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores tenemos:

$\angle AOB + \angle BOC = 2\angle DOB + 2\angle BOE.$

Como $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes, $\angle AOB + \angle BOC = 180^o$. Entonces

$2\angle DOB + 2\angle BOE = 180^o.$

Luego, $\angle DOB + \angle BOE = 90^o.$

Por tanto, $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE}$ ya que se cortan formando un ángulo recto.

Ejemplo 12.2

En la Figura 12.5,

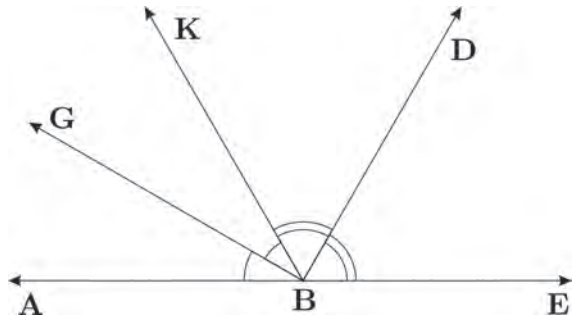


Figura 12.5

A , B , E son colineales,
$\angle ABG \cong \angle GBK$ y
$\angle KBD \cong \angle DBE.$
Encontrar la medida de $\angle GBD.$

Solución

Como $\angle ABG \cong \angle GBK$, entonces $\overrightarrow{BG}$ es bisectriz de $\angle ABK.$

Como $\angle KBD \cong \angle DBE$, entonces $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz de $\angle KBE.$

Como $\angle ABK$ y $\angle KBE$ son adyacentes, sus bisectrices son perpendiculares entre sí.

Luego, $\angle GBD = 90^o.$

Mediatriz de un segmento

Dado un segmento $\overline{AB}$, la recta perpendicular al segmento en su punto medio, se llama **mediatriz** de $\overline{AB}$.

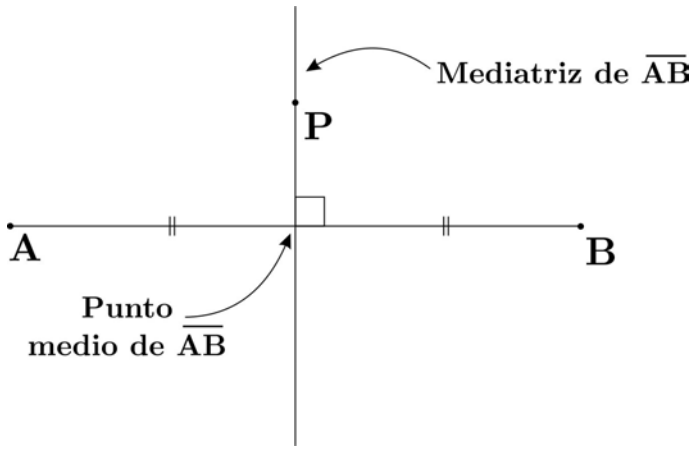


Figura 12.6

Cada punto de la mediatriz de un segmento está a igual distancia de los extremos del segmento, o en otras palabras, "equidista" de los extremos del segmento. Es decir, si P es un punto de la mediatriz de $\overline{AB}$ entonces $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.

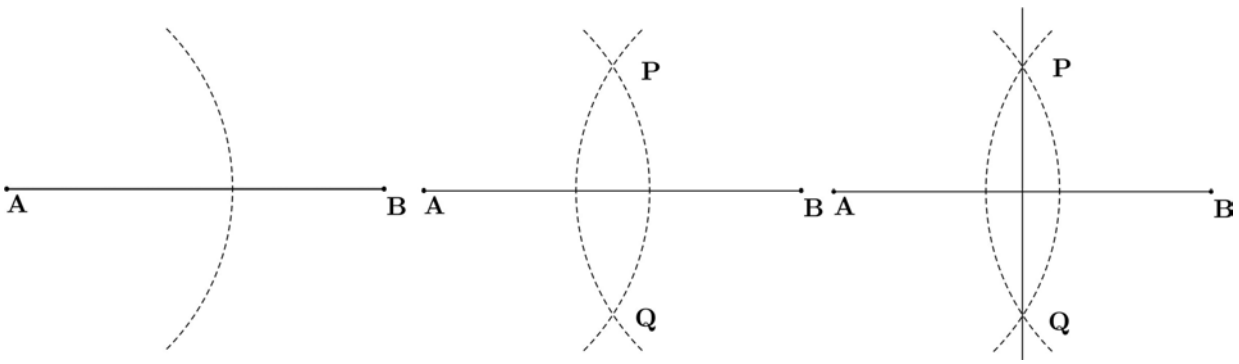
También se cumple que cualquier punto del plano que equidista de los extremos de un segmento, pertenece a la mediatriz del segmento.

Construcción 12.1

¿Cómo trazar la mediatriz de un segmento?

Para trazar la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$, usando regla y compás, procedemos así:

1. Trazamos un arco de circunferencia con centro en A y radio mayor que la mitad de la medida de $\overline{AB}$.
2. Trazamos otro arco de circunferencia con igual radio al del paso 1. y con centro en B. Estos arcos se cortan en los puntos que llamaremos P y Q.
3. Trazamos la recta que pasa por los puntos P y Q. La recta PQ es la mediatriz de $\overline{AB}$.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Figura 12.7

Construcción 12.2

¿Cómo trazar una perpendicular a una recta que pase por un punto dado?

Veamos primero el caso en el que el punto dado esté fuera de la recta.

Sea L la recta y P un punto exterior a ella.

Trazamos un arco de circunferencia con centro en P y un radio lo suficientemente grande para que corte la recta L en dos puntos que llamaremos R y S.

Construimos la mediatriz de $\overline{RS}$. Esta recta pasa por P ya que P equidista de R y S. Dicha mediatriz es la perpendicular pedida.

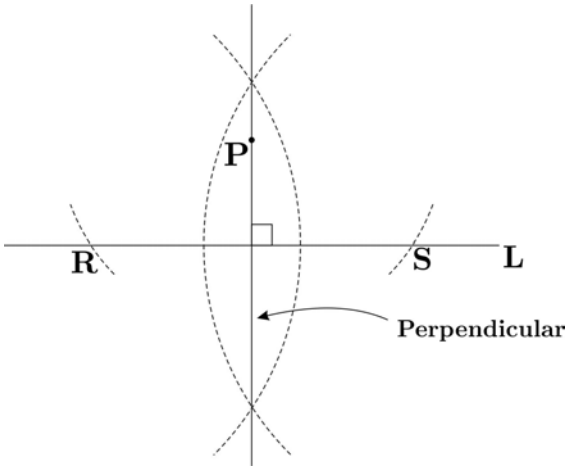


Figura 12.8

Si el punto P está sobre la recta L la construcción es más sencilla ya que con centro en P y radio arbitrario trazamos dos arcos de circunferencia que corten la recta en los puntos que llamaremos R y S. Luego construimos la mediatriz de $\overline{RS}$. Esta recta pasa por el punto P y es por lo tanto, la perpendicular pedida.

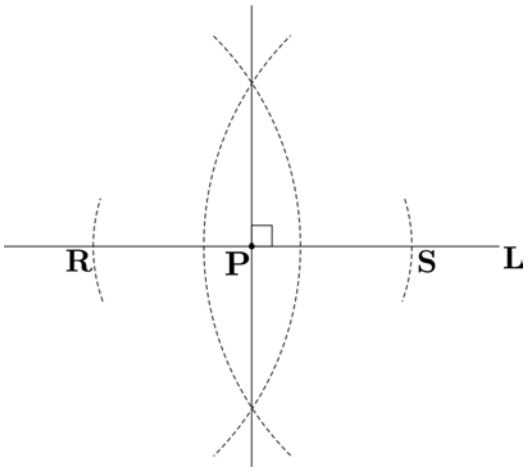


Figura 12.9

Ejemplo 12.3

En la Figura 12.10, si $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AC}$ y $\angle ABG \cong \angle CBD$, demostrar que $\angle GBE \cong \angle DBE$.

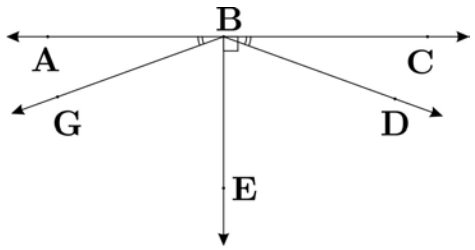


Figura 12.10

Solución

Como

$\angle ABG$ es el complemento de $\angle GBE$ porque forman un ángulo recto y

$\angle CBD$ es el complemento de $\angle DBE$ por la misma razón, entonces

$\angle GBE \cong \angle DBE$ por tener complementos congruentes.

Ejemplo 12.4

En la Figura 12.11,

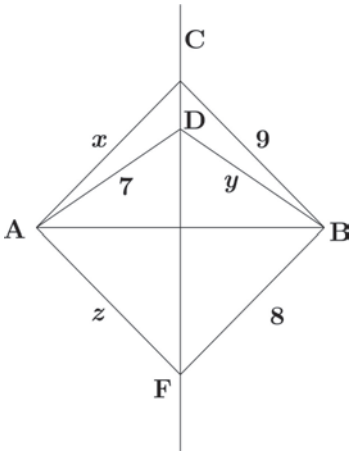


Figura 12.11

CF es la mediatriz de $\overline{AB}$.

Hallar x , y y z.

Solución

Sabemos que todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento. Por tanto,

$\overline{CA} \cong \overline{CB}$ y así $x = 9$,

$\overline{DA} \cong \overline{DB}$ y así $y = 7$,

$\overline{FA} \cong \overline{FB}$ y así $z = 8$.

Ejercicios propuestos

1. Completar las siguentes afirmaciones:

   (a) Si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces _____ de los extremos del segmento.

   (b) La distancia de un punto P exterior a una recta l y la recta l es _____

   _____

   (c) En un plano dado, por un punto exterior a una recta, podemos trazar _____ rectas perpendiculares a la recta dada.

2. Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ semirrectas opuestas y sean E , F y H puntos al mismo lado de AB. Los puntos E y H están en lados opuestos de BF. Los puntos A y H están del mismo lado de BF. $BF \perp AC$, $BE \perp BH$ y $\angle FBE = 20^{\circ}$.

   (a) Dibujar la figura.

   (b) Encontrar $\angle EBA$.

   (c) Encontrar $\angle FBH$.

   (d) Encontrar $\angle EBC$.

Respuestas

1. (a) Equidista.

   (b) La medida del segmento perpendicular trazado del punto a la recta.

   (c) Una.

2. (a)

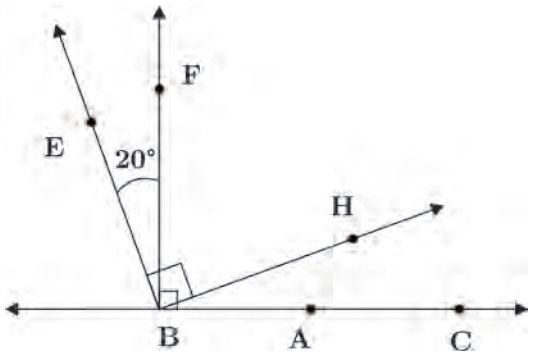


Figura 12.12

   (b) $\angle EBA = 110^{\circ}$.

   (c) $\angle FBH = 70^{\circ}$.

   (d) $\angle EBC = 110^{\circ}$.

Lección 13

Rectas paralelas
Ángulos formados por rectas cortadas por una secante

En esta lección trabajaremos el concepto de paralelismo, el postulado de las paralelas y los teoremas relacionados. Veremos además los nombres de los ángulos formados cuando dos rectas son cortadas por una secante y un axioma que nos muestra una propiedad especial de algunos de estos ángulos, cuando dichas rectas son paralelas.

Rectas paralelas

Dos rectas L y R son **paralelas** si están situadas en un mismo plano y no se cortan, es decir, no tienen ningún punto en común. Lo denotamos $L \parallel R$.

Axioma 13.1 *(Quinto postulado o postulado de las paralelas)*

Por un punto exterior a una recta pasa una paralela y sólo una a dicha recta.

A continuación enunciaremos algunos teoremas sobre propiedades de perpendicularidad y paralelismo entre rectas. Haremos la prueba de sólo algunos de ellos.

Teorema 13.1

Dos rectas diferentes paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

Prueba

Pensemos ¿qué ocurriría si las dos primeras rectas no fueran paralelas? Ellas se cortarían en un punto, digamos A, y por este punto estarían pasando dos rectas diferentes, paralelas a una tercera, pero esto va en contra de lo que nos dice el quinto postulado o postulado de las paralelas. Luego, las dos primeras rectas deben ser paralelas.

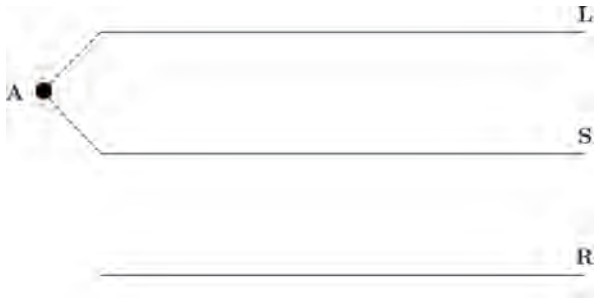


Figura 13.1

Si $L \parallel R$ y $S \parallel R$ entonces $L \parallel S$.

Teorema 13.2

Dos rectas diferentes en un plano son paralelas entre sí, si ambas son perpendiculares a la misma recta.

Prueba

Pensemos ¿qué pasaría si dichas rectas no son paralelas? Vemos que se cortarían en un punto y entonces por dicho punto pasarían dos rectas diferentes perpendiculares a una misma recta, lo cual contradice el axioma visto en la lección anterior, que nos dice que por un punto, ya sea exterior o no a una recta, pasa una perpendicular y sólo una perpendicular a dicha recta. Luego, las rectas tendrán que ser paralelas.

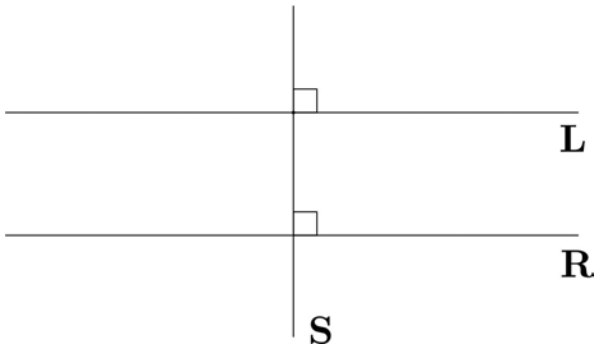


Figura 13.2

Si $L \perp S$ y $R \perp S$ entonces $L \parallel R$.

Teorema 13.3

Si dos rectas son paralelas entre sí, toda recta que corta a una de ellas corta también a la otra.

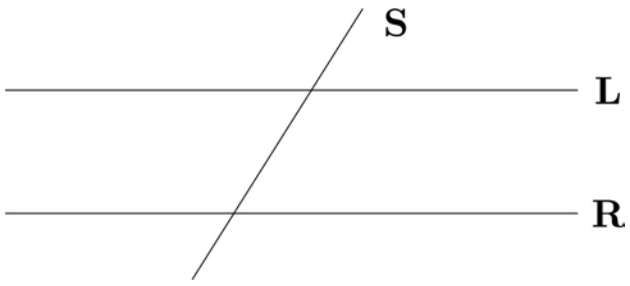


Figura 13.3

Sea $L \parallel R$. Si S corta a L también corta a R.

Prueba

¿Qué pasaría si la recta S corta sólo a la recta L y no a R?
Si S no corta a R entonces S sería paralela a R, y tendríamos que por un punto exterior a R

pasarían dos rectas diferentes paralelas a la misma recta, pero esto contradice el Postulado de las paralelas. Luego, la recta L corta también a la recta R.

Teorema 13.4

Si dos rectas son paralelas entre sí, toda recta que sea perpendicular a una de ellas lo es también a la otra.

Este teorema es una consecuencia directa del teorema anterior.

Los resultados que se concluyen directamente de un teorema ya demostrado se conocen con el nombre de **corolarios** y en general no se demuestran.

Ángulos formados por rectas cortadas por una secante

Se llama **recta secante**, o recta transversal, a toda recta que interseca una figura.

Cuando dos rectas son cortadas por una secante, se forman ocho ángulos. Los cuatro ángulos comprendidos entre las rectas se llaman **ángulos internos** o **ángulos interiores**; los otros cuatro se llaman **ángulos externos** o **ángulos exteriores**.

Dos ángulos internos no adyacentes ubicados a uno y otro lado de la secante se llaman **ángulos alternos internos**.

Dos ángulos externos no adyacentes, ubicados a uno y otro lado de la secante se llaman **ángulos alternos externos**.

Dos ángulos no adyacentes, situados a un mismo lado de la secante, uno interior y el otro exterior, se llaman **ángulos correspondientes**.

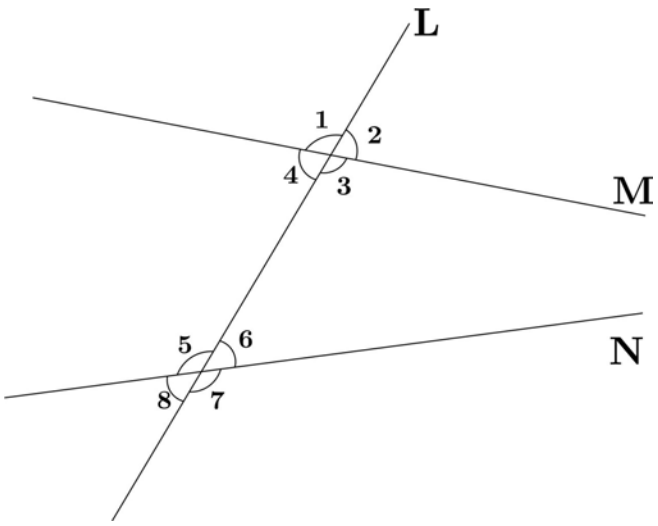


Figura 13.4

Si M y N son dos rectas cortadas por una recta secante L como se muestra en la Figura 13.4, entonces tenemos:

Ángulos externos: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ y $\angle 8$

Ángulos internos: $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$

Ángulos alternos externos: $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 8$

Ángulos alternos internos: $\angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$

Ángulos correspondientes: $\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 8$; $\angle 2$ y $\angle 6$; $\angle 3$ y $\angle 7$.

Ejemplo 13.1

Si M y N son dos rectas cortadas por una secante R, como se muestra en la Figura 13.5, y si $\angle 1 = 120^o$ y $\angle 6 = 75^o$:

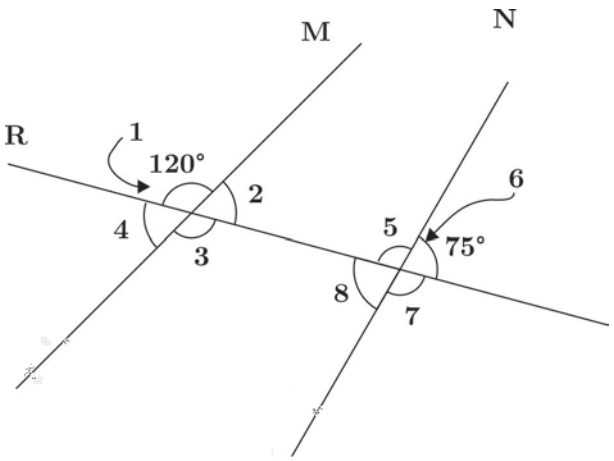


Figura 13.5

1. Indicar cuáles parejas de ángulos son alternos internos.
2. Indicar cuáles parejas de ángulos son alternos externos.
3. Indicar cuáles parejas de ángulos son correspondientes.
4. Hallar la medida de $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 7$ y $\angle 8$.

Solución

1. Los ángulos alternos internos son: $\angle 5$ y $\angle 3$, $\angle 2$ y $\angle 8$.
2. Los ángulos alternos externos son: $\angle 4$ y $\angle 6$, $\angle 1$ y $\angle 7$.
3. Los ángulos correspondientes son: $\angle 6$ y $\angle 2$, $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 8$, $\angle 3$ y $\angle 7$.
4. Como $\angle 3$ y $\angle 1$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 3 = 120^o$.

   Como $\angle 1 + \angle 2 = 180^o$ por ser adyacentes, entonces $\angle 2 = 180^o - \angle 1 = 180^o - 120^o = 60^o$.

   Como $\angle 2$ y $\angle 4$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 4 = 60^o$.

   Como $\angle 6$ y $\angle 8$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 8 = 75^o$.

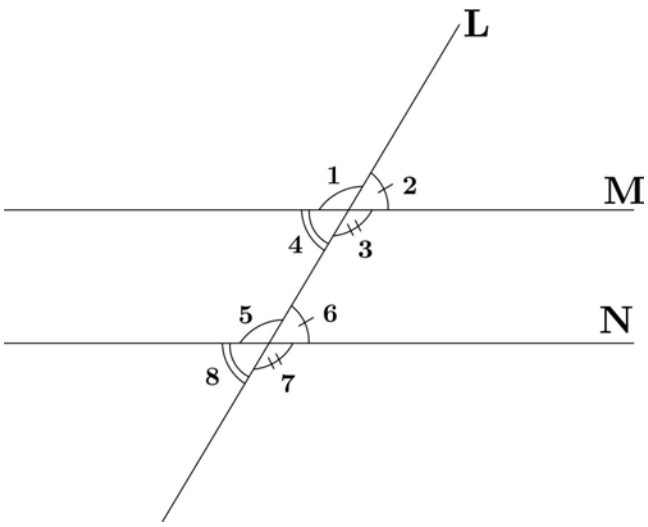
   Como $\angle 5 + \angle 6 = 180^o$ por ser adyacentes, entonces $\angle 5 = 180^o - \angle 6 = 180^o - 75^o = 105^o$.

   Como $\angle 5$ y $\angle 7$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle 7 = 105^o$.

Cuando las dos rectas son paralelas, los ángulos que se forman tienen propiedades especiales. Veamos la primera de ellas relacionada con los ángulos correspondientes.

Axioma 13.2

Dos rectas paralelas cortadas por una secante forman ángulos correspondientes congruentes. Si $M \| N$ y L secante entonces,



$\angle 1 \cong \angle 5$; $\angle 4 \cong \angle 8$; $\angle 2 \cong \angle 6$; $\angle 3 \cong \angle 7$.

Figura 13.6

También es válido el siguiente resultado, aunque no haremos su prueba aquí.

Si una recta secante a otras dos rectas forma ángulos correspondientes congruentes, dichas rectas son paralelas.

Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los siguientes enunciados, completar la afirmación dada.

   (a) Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta en dos puntos diferentes, entonces las dos rectas son _____ .

   (b) Dos rectas en un plano son paralelas si _____ .

   (c) Si dos rectas son paralelas entre si, toda perpendicular a una de ellas es _____ a la otra.

   (d) Una recta secante es _____ .

   (e) Si dos rectas son cortadas por una secante, se forman _____ ángulos.

2. Sean L y R dos rectas cortadas por una secante S y $\angle 4 = 85^o$ y $\angle 6 = 135^o$.

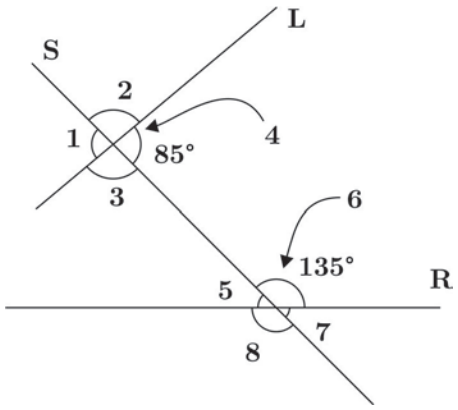


Figura 13.7

(a) Indicar cuáles parejas de ángulos son alternos internos.

(b) Indicar cuáles parejas de ángulos son alternos externos.

(c) Indicar cuáles parejas de ángulos son correspondientes.

(d) Hallar la medida de $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 5$, $\angle 7$ y $\angle 8$.

Respuestas

1. (a) Paralelas entre sí.

   (b) No se cortan, es decir, no tienen puntos en común.

   (c) También perpendicular a la otra.

   (d) Es toda recta que interseca una figura.

   (e) Ocho.

2. (a) $\angle 5$ y $\angle 4$, $\angle 3$ y $\angle 6$.

   (b) $\angle 1$ y $\angle 7$, $\angle 2$ y $\angle 8$.

   (c) $\angle 6$ y $\angle 2$, $\angle 1$ y $\angle 5$, $\angle 4$ y $\angle 7$, $\angle 3$ y $\angle 8$.

   (d) $\angle 1 = 85^o$.

   $\angle 2 = 95^o$.

   $\angle 3 = 95^o$.

   $\angle 8 = 135^o$.

   $\angle 5 = 45^o$.

   $\angle 7 = 45^o$.

Lección 14

Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante

En esta lección veremos otras propiedades de los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante. Como una aplicación construiremos, con regla y compás, una recta paralela a otra recta por un punto exterior a ella.

Teorema 14.1

Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante,

1. Los ángulos alternos externos son congruentes.
2. Los ángulos alternos internos son congruentes.

Prueba

Sean $M \| N$ y L secante.

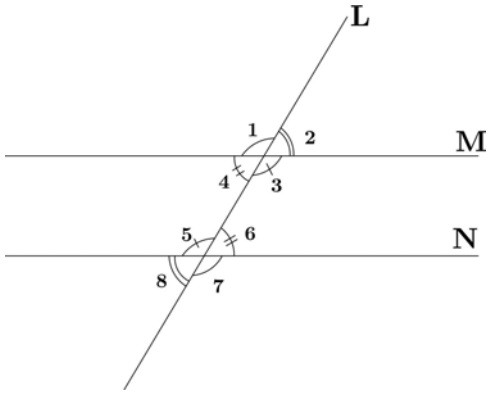


Figura 14.1

1. Debemos probar que $\angle 1 \cong \angle 7$ y que $\angle 2 \cong \angle 8$.

   Como $\angle 1 \cong \angle 3$ por ser opuestos por el vértice y, $\angle 3 \cong \angle 7$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces

   $$\angle 1 \cong \angle 7.$$

   De la misma forma podemos probar que $\angle 2 \cong \angle 8$.

2. Debemos probar que $\angle 3 \cong \angle 5$ y que $\angle 4 \cong \angle 6$.

Como $\angle 3 \cong \angle 1$ por ser opuestos por el vértice y, $\angle 1 \cong \angle 5$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces

$$\angle 3 \cong \angle 5.$$

De la misma forma podemos probar que $\angle 4 \cong \angle 6$.

También son válidos los siguientes resultados que no demostraremos aquí:

Teorema 14.2

1. Si una recta secante corta a otras dos rectas formando ángulos alternos internos congruentes, dichas rectas son paralelas.
2. Si una recta secante corta a otras dos rectas formando ángulos alternos externos congruentes, dichas rectas son paralelas.

Ejemplo 14.1

Si $M \| N$, L secante y $\angle 1 = 80°$, encontrar la medida de los otros ángulos de la Figura 14.2.

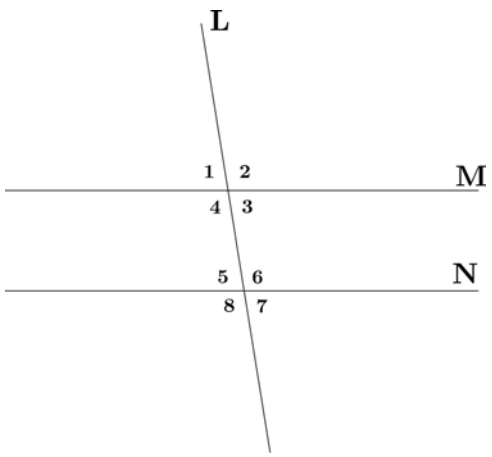


Figura 14.2

Solución

Como $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ por ser adyacentes, entonces $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 80° = 100°$.

Como $\angle 3 \cong \angle 1$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\angle 3 = 80°$.

Como $\angle 5 \cong \angle 1$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 5 = 80°$.

Como $\angle 7 \cong \angle 1$ por ser alternos externos entre paralelas, entonces $\angle 7 = 80°$.

Como $\angle 6 \cong \angle 2$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 6 = 100°$.

Como $\angle 8 \cong \angle 2$ por ser alternos externos entre paralelas, entonces $\angle 8 = 100°$.

Como $\angle 4 \cong \angle 6$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 4 = 100°$.

Ejemplo 14.2

Hallar $\angle x$ y $\angle y$ en la Figura 14.3, si la recta AB es paralela a la recta CD, $\angle CBA = 45°$ y $\angle CAB = 50°$.

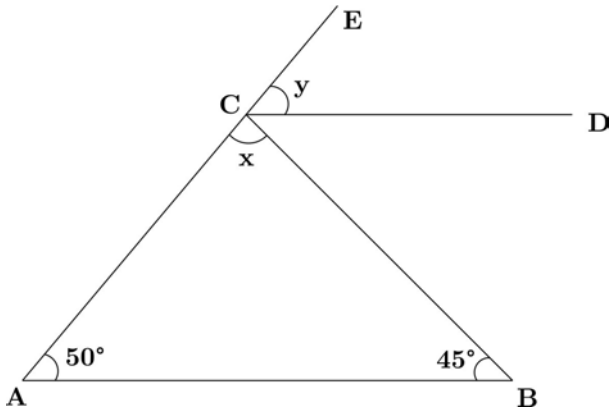


Figura 14.3

Solución

Como la recta AC es secante a las rectas paralelas AB y CD, entonces

$\angle y \cong \angle CAB$ por ser correspondientes entre paralelas. Luego, $\angle y = 50°$.

Como la recta BC es secante a las rectas paralelas AB y CD, entonces

$\angle BCD \cong \angle CBA$ por ser alternos internos entre paralelas. Luego, $\angle BCD = 45°$.

Como $\angle x + \angle BCD + \angle y = 180°$, entonces $\angle x + 45° + 50° = 180°$ y así,

$\angle x = 180° - 45° - 50° = 85°$.

Luego, $\angle x = 85°$ y $\angle y = 50°$.

Ejemplo 14.3

En la Figura 14.4, si $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del $\angle AOF$, la recta AB es secante a las rectas paralelas EF y GH y $\angle AOC = 70°$, hallar $\angle\alpha$ y $\angle\beta$.

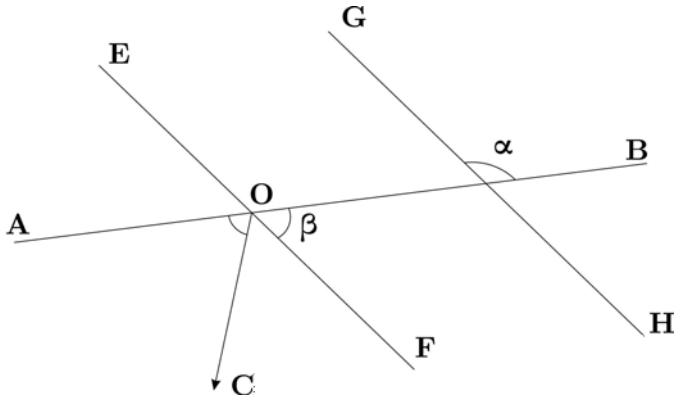


Figura 14.4

Solución

Como $\angle\beta + \angle AOF = 180°$, porque $\angle AOB$ es un ángulo llano, entonces

$\angle\beta = 180° - \angle AOF$.

Como $\angle AOF \cong 2\angle(AOC)$ porque $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del $\angle AOF$, entonces

$\angle AOF = 2(70°) = 140°$ y así $\angle\beta = 180° - 140° = 40°$.

Como $\angle\alpha \cong \angle EOB$ por ser correspondientes entre paralelas y como $\angle EOB \cong \angle AOF$ por ser opuestos por el vértice, entonces, $\angle\alpha = 140°$.

Luego, $\angle\alpha = 140°$ y $\angle\beta = 40°$.

Construcción 14.1

¿Cómo trazar una recta paralela a otra recta por un punto exterior a ella?

Sea L una recta y P un punto exterior a ella. Para trazar una recta paralela a L que pase por P procedemos como sigue:

1. Tomamos dos puntos distintos R y Q sobre la recta L, como se muestra en la Figura 14.5.

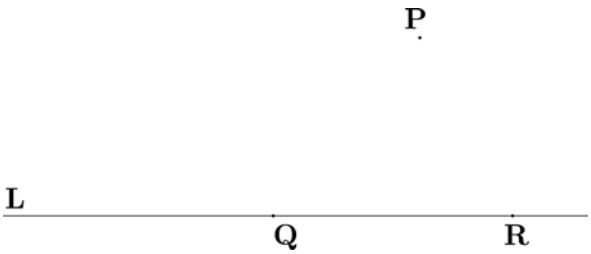


Figura 14.5

2. Trazamos la recta PQ como se muestra en la Figura 14.6.

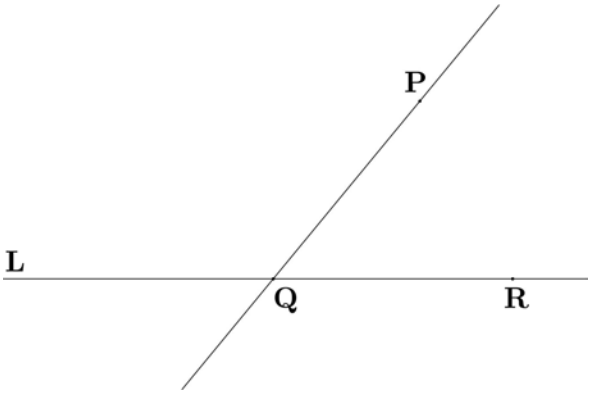


Figura 14.6

3. Construimos el $\angle QPS \cong \angle PQR$ de manera que R y S estén en semiplanos diferentes con respecto a la recta PQ, como se muestra en la Figura 14.7.

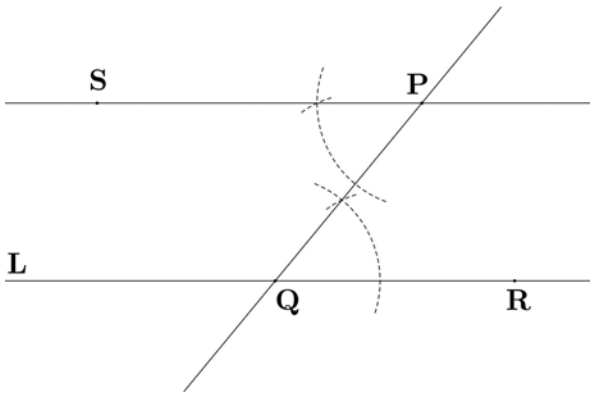


Figura 14.7

Como $\angle QPS \cong \angle PQR$ por construcción y además son ángulos alternos internos, entonces $PS \| L$.

Ejemplo 14.4

Si M y N son dos rectas paralelas cortadas por una recta secante P, la medida de $\angle 1$ es $2x$ y la medida de $\angle 2$ es $4x$, calcular la medida de todos los ángulos de la Figura 14.8

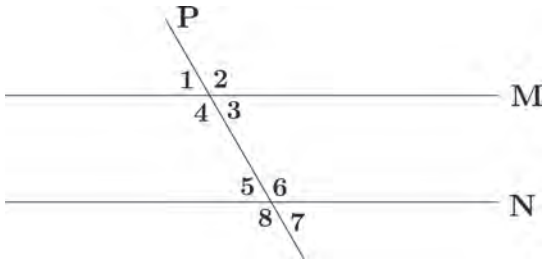


Figura 14.8

Solución

Como

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ porque $\angle 1$ y $\angle 2$ son adyacentes, entonces

$2x + 4x = 180°$. Luego, $6x = 180°$ y así $x = 30°$.

Por tanto, $\angle 1 = 2x = 2\,(30°) = 60°$ y $\angle 2 = 4x = 4\,(30°) = 120°$.

Ahora,

$\angle 5 \cong \angle 1$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 5 = 60°$.

$\angle 6 \cong \angle 2$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 6 = 120°$.

$\angle 7 \cong \angle 1$ por ser alternos externos entre paralelas, entonces $\angle 7 = 60°$.

$\angle 8 \cong \angle 2$ por ser alternos externos entre paralelas, entonces $\angle 8 = 120°$.

$\angle 4 \cong \angle 6$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 4 = 120°$.

$\angle 3 \cong \angle 7$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 3 = 60°$.

Luego,

$\angle 1 \cong \angle 3 \cong \angle 5 \cong \angle 7$ y cada uno mide $60°$.

$\angle 2 \cong \angle 4 \cong \angle 6 \cong \angle 8$ y cada uno mide $120°$.

Ejemplo 14.5

Si las rectas PQ y RS son paralelas cortadas por la recta secante MN y la medida de $\angle 2$ es $75°$, determinar la medida de los otros ángulos de la Figura 14.9

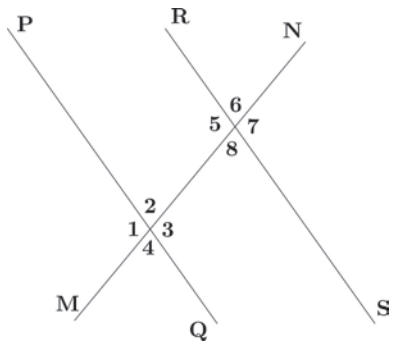


Figura 14.9

Solución

Como $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ porque $\angle 1$ y $\angle 2$ son adyacentes, entonces

$\angle 1 = 180° - \angle 2 = 180° - 75° = 105°$.

Ahora,

$\angle 5 \cong \angle 1$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 5 = 105°$.

$\angle 6 \cong \angle 2$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle 6 = 75°$.

$\angle 7 \cong \angle 1$ por ser alternos externos entre paralelas, entonces $\angle 7 = 105°$.

$\angle 8 \cong \angle 2$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 8 = 75°$.

$\angle 3 \cong \angle 5$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 3 = 105°$.

$\angle 4 \cong \angle 6$ por ser alternos externos entre paralelas, entonces $\angle 4 = 75°$.

Luego,

$\angle 1 \cong \angle 3 \cong \angle 5 \cong \angle 7$ y cada uno mide $105°$.

$\angle 2 \cong \angle 4 \cong \angle 6 \cong \angle 8$ y cada uno mide $75°$.

Ejemplo 14.6

Determinar la medida de $\angle x$ y $\angle z$ de la Figura 14.10, sabiendo que la recta MN es paralela a la recta PQ, $\angle QCB = 55°$ y $\angle BCA = 50°$.

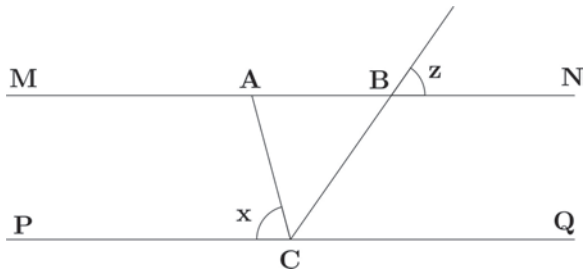


Figura 14.10

Solución

$\angle z \cong \angle QCB$ por ser correspondientes entre paralelas, entonces $\angle z = 55°$.

Como $\angle x + \angle BCA + \angle QCB = 180°$, entonces

$$\angle x = 180° - \angle BCA - \angle QCB \qquad = 180° - 50° - 55° = 180° - 105° \qquad = 75°.$$

Luego, $\angle x = 75°$ y $\angle z = 55°$.

Ejercicios propuestos

1. Calcular la medida de $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$ de la Figura 14.11, si las rectas AC y BD son paralelas, $\angle ACB = 60°$ y $\angle BAC = 70°$.

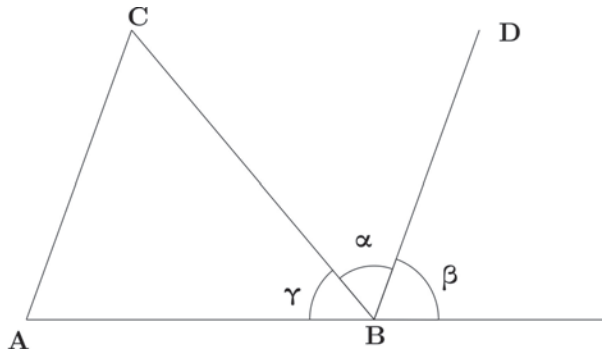


Figura 14.11

2. Determinar las medidas de $\angle\chi$ y $\angle\varphi$ de la Figura 14.12, sabiendo que $AB \parallel DE$, $CD \parallel EF$ y $\angle E = 110°$.

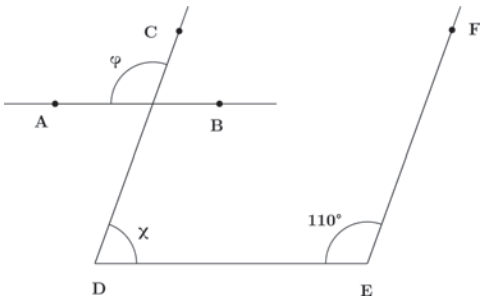


Figura 14.12

3. Determinar los valores de χ y φ de la Figura 14.13, si $L \parallel S$.

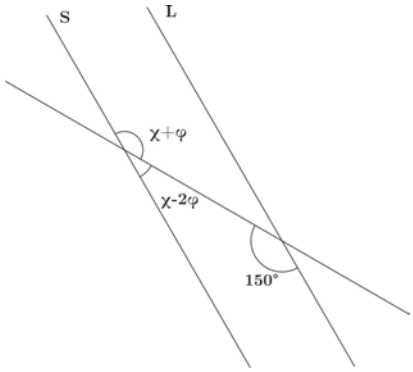


Figura 14.13

Respuestas

1. $\angle\alpha = 60°$, $\angle\beta = 70°$ y $\angle\gamma = 50°$.
2. $\angle\chi = 70°$ $\angle\varphi = 110°$.
3. $\chi = 110°$, $\varphi = 40°$.

Lección 15

Triángulos
Ángulos interiores de un triángulo

En esta lección veremos el concepto de triángulo, sus elementos y una propiedad de sus ángulos interiores.

Un **triángulo** es la región del plano limitada por tres segmentos de recta que se cortan dos a dos en tres puntos no colineales.

Si A, B y C son tres puntos no colineales, el triángulo ABC, que se denota $\triangle ABC$, es la región finita del plano limitada por los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

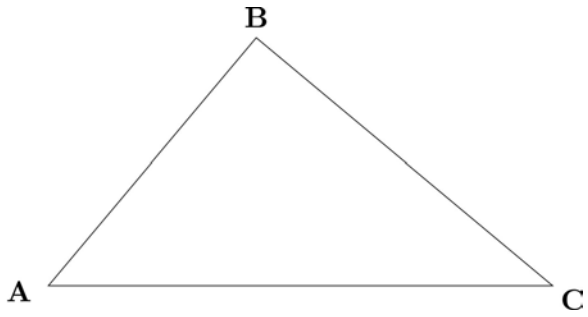


Figura 15.1

Los puntos A, B y C se llaman **vértices** del triángulo.

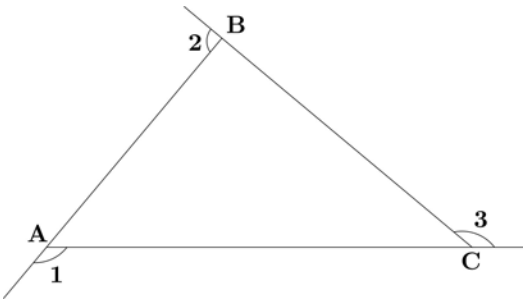
Los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman **lados** del triángulo.

Los ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$, determinados por los lados, en el interior del triángulo, se llaman **ángulos interiores**, o simplemente ángulos, del triángulo.

Los ángulos interiores se suelen denotar usando únicamente la letra del vértice, así, $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ y la longitud del lado opuesto a cada ángulo se representa con la misma letra pero minúscula.

La **base** de un triángulo es cualquiera de los lados del triángulo.

Un **ángulo exterior** de un triángulo es el ángulo formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.



$\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son los ángulos exteriores del $\triangle ABC$.

Figura 15.2

A continuación probaremos un resultado importante relacionado con los ángulos interiores de un triángulo.

Teorema 15.1

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Prueba

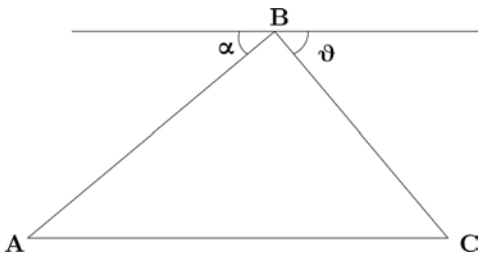


Figura 15.3

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera.

Debemos probar que

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°.$$

Tracemos por un vértice, digamos B, una recta paralela al lado opuesto $\overline{AC}$ y llamemos α y υ los ángulos que forma la paralela con dos de los lados del triángulo.

Como $\angle\alpha$, $\angle ABC$ y $\angle\upsilon$ forman un ángulo llano entonces

$$\angle\alpha + \angle ABC + \angle\upsilon = 180° \tag{15.1}$$

Como

$$\angle BAC \cong \angle\alpha \tag{15.2}$$

porque $\angle BAC$ y $\angle\alpha$ son alternos internos entre paralelas y

$$\angle ACB \cong \angle\upsilon \tag{15.3}$$

porque $\angle ACB$ y $\angle\upsilon$ son alternos internos entre paralelas, entonces sustituyendo 15.2 y 15.3 en 15.1 tenemos que

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°. \tag{15.4}$$

Ejemplo 15.1

1. Si los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ del triángulo de la Figura 15.4 miden 75° y 45° respectivamente, hallar la medida del $\angle B$.

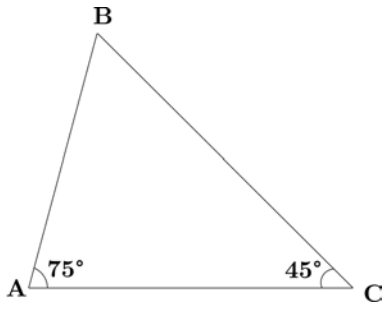


Figura 15.4

2. Hallar la medida de los ángulos del $\triangle ABC$ de la Figura 15.5 si $\angle A = (10x - 20)°$, $\angle B = (x + 15)°$ y $\angle C = (x + 5)°$.

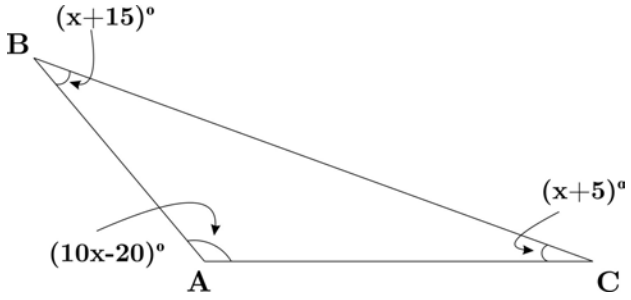


Figura 15.5

Solución

1. Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° entonces

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \tag{15.5}$$

Como $\angle A = 75°$ y $\angle C = 45°$, despejando $\angle B$ en 15.5 y sustituyendo $\angle A$ y $\angle C$ tenemos:

$$\begin{aligned} \angle B &= 180° - \angle A - \angle C \\ &= 180° - 75° - 45° \\ &= 60°. \end{aligned}$$

Luego, la medida del $\angle B$ es 60°.

2. Procediendo de igual forma que en el ejemplo anterior, la suma de las medidas de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ es 180°, esto es,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \tag{15.6}$$

Sustituimos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ en 15.6 obteniendo

$$(10x - 20) + (x + 15) + (x + 5) = 180.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 10x - 20 + x + 15 + x + 5 &= 180 \\ 12x &= 180 \\ x &= \frac{180}{12} \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de x en cada una de las expresiones dadas para las medidas de los ángulos, obtenemos: $\angle A = (10(15) - 20)^\circ = 130^\circ$, $\angle B = (15 + 15)^\circ = 30^\circ$ y $\angle C = (15 + 5)^\circ = 20^\circ$.

Luego, $\angle A = 130^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ y $\angle C = 20^\circ$.

Ejemplo 15.2

En la Figura 15.6, $\angle Q = 74^\circ$, $\overrightarrow{PS}$ es la bisectriz del $\angle P$ y $\overrightarrow{QS}$ es la bisectriz del $\angle Q$. Hallar $\angle 5$.

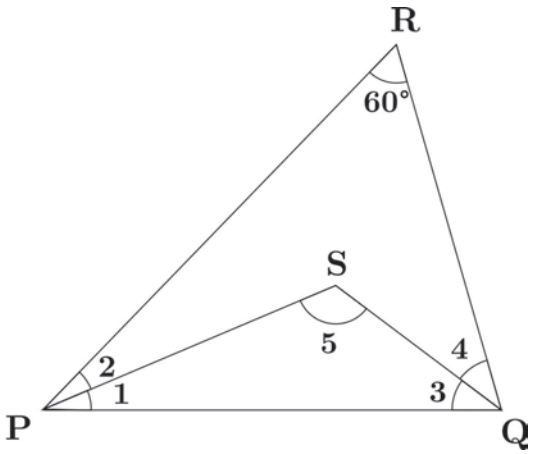


Figura 15.6

Solución

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°,

$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

y así

$$\begin{aligned} \angle P &= 180^\circ - \angle Q - \angle R \\ &= 180^\circ - 74^\circ - 60^\circ \\ &= 46^\circ. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{PS}$ es la bisectriz del $\angle P$, $\angle 1 \cong \angle 2$ y por tanto

$$\begin{aligned} m(\angle 1) &= \frac{1}{2} m(\angle P) \\ &= \frac{1}{2}(46^\circ) \\ &= 23^\circ. \end{aligned}$$

Como los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$ son congruentes por ser $\overrightarrow{QS}$ la bisectriz del $\angle Q$, entonces

$$\begin{aligned} m(\angle 3) &= \frac{1}{2} m(\angle Q) \\ &= \frac{1}{2}(74^\circ) \\ &= 37^\circ. \end{aligned}$$

Como $\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$, por ser $\angle 1$, $\angle 3$ y $\angle 5$ los ángulos interiores del triángulo $\triangle PQS$, entonces

$$\begin{aligned} \angle 5 &= 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 \\ &= 180^\circ - 23^\circ - 37^\circ \\ &= 120^\circ. \end{aligned}$$

Luego, $\angle 5 = 120^\circ$.

Ejemplo 15.3

En la Figura 15.7, si la recta AB es paralela a $\overline{DE}$, hallar $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$.

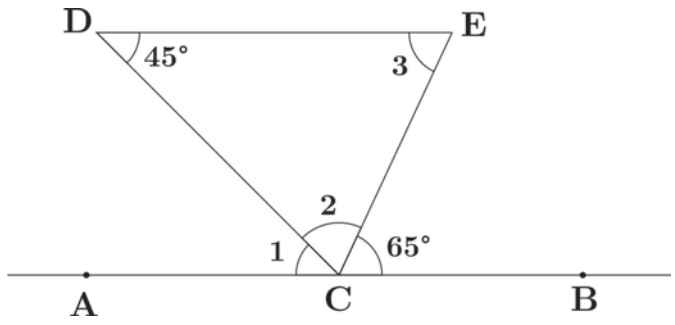


Figura 15.7

Solución

Como $\angle 3 \cong \angle BCE$ por ser alternos internos entre paralelas y $\angle BCE = 65^\circ$, entonces $\angle 3 = 65^\circ$.

Como $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle D$ son los ángulos interiores del $\triangle CED$, entonces $\angle 2 + \angle 3 + \angle D = 180°$ y así

$$\begin{aligned}\angle 2 &= 180° - \angle 3 - \angle D \\ &= 180° - 65° - 45° \\ &= 70°.\end{aligned}$$

Como $\angle 1$ y $\angle D$ son alternos internos entre paralelas, $\angle 1 \cong \angle D$ y como $\angle D = 45°$, entonces $\angle 1 = 45°$.

Luego, $\angle 1 = 45°$, $\angle 2 = 70°$ y $\angle 3 = 65°$.

Ejercicios propuestos

1. Si $\triangle ABC$ es el triángulo de la Figura 16.9, en cada literal completar la afirmación dada.

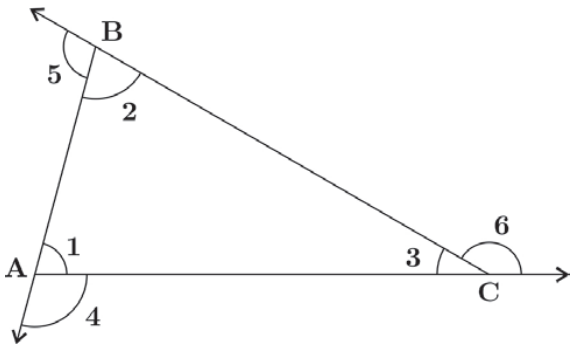


Figura 15.8

   (a) $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son los ángulos _____ del $\triangle ABC$.

   (b) $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$ son los ángulos _____ del $\triangle ABC$.

   (c) $\angle 1 + \angle 4 =$_____, $\angle 2 + \angle 5 =$_____, $\angle 3 + \angle 6 =$_____.

   (d) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$_____.

   (e) Si $\angle 1$ fuera un ángulo recto entonces $\angle 2 + \angle 3 =$_____.

   (f) Si en el triángulo del literal anterior $\angle 2 \cong \angle 3$, entonces $\angle 2 =$_____ y $\angle 3 =$_____.

   (g) Si los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son congruentes entre sí entonces $\angle 1 =$_____, $\angle 2 =$_____ y $\angle 3 =$_____.

2. Consideremos el $\triangle ABC$ de la Figura 15.9 con $\angle A = (x - 30)°$, $\angle B = (2x - 120)°$ y $\angle C = \left(\frac{1}{2}x + 15\right)°$.

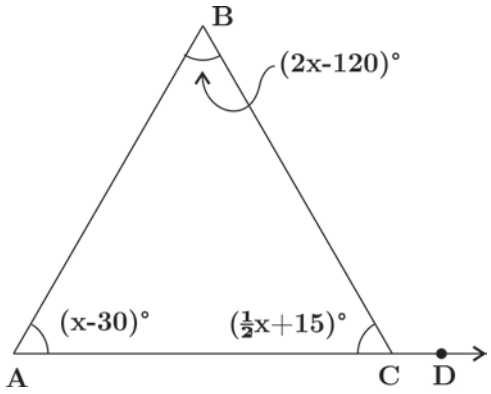


Figura 15.9

(a) Hallar la medida de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

(b) Hallar la medida del ángulo exterior $\angle BCD$.

3. Hallar la medida de los ángulos interiores de un $\triangle ABC$ si la medida del $\angle C$ es 27° mayor que la del $\angle B$ y los ángulos $\angle B$ y $\angle A$ son congruentes.

Respuestas

1. (a) Interiores.

   (b) Exteriores.

   (c) 180°, 180°, 180°.

   (d) 180°.

   (e) 90°.

   (f) 45°, 45°.

   (g) 60°, 60° y 60°.

2. (a) 60°, 60° y 60°.

   (b) 120°.

3. $\angle A = 51°$, $\angle B = 51°$ y $\angle C = 78°$.

Lección 16

Ángulos exteriores de un triángulo

En esta lección veremos una propiedad importante de los ángulos exteriores de un triángulo.

Teorema 16.1

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Prueba

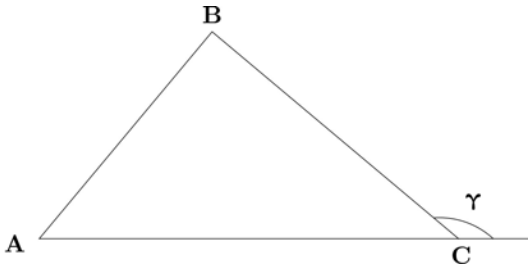


Figura 16.1

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y sea γ un ángulo exterior.

Debemos probar que

$$\angle\gamma = \angle BAC + \angle ABC.$$

Como $\angle\gamma + \angle ACB = 180°$ porque $\angle\gamma$ y $\angle ACB$ son ángulos adyacentes, entonces

$$\angle\gamma = 180° - \angle ACB \tag{16.1}$$

Como $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo, entonces

$$\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC \tag{16.2}$$

Reemplazando 16.2 en 16.1 tenemos $\angle\gamma = 180° - (180° - \angle BAC - \angle ABC)$.

Luego,

$$\angle\gamma = \angle BAC + \angle ABC.$$

Nota 16.1

Observamos que esto significa que la medida de un ángulo exterior siempre es mayor que la medida de cualquier ángulo interior no adyacente a él.

Ejemplo 16.1

En el $\triangle ABC$ de la Figura 16.2, las medidas de los $\angle\alpha$ y $\angle ABC$ son 135° y 35° respectivamente.

Hallar la medida de los restantes ángulos interiores y exteriores del triángulo.

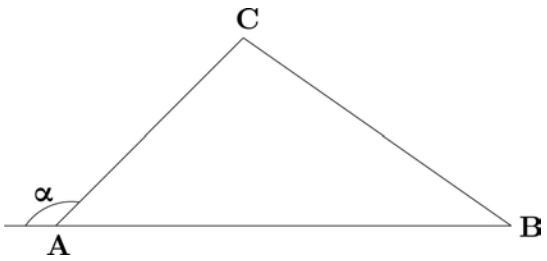


Figura 16.2

Solución

Llamemos $\angle\beta$ y $\angle\upsilon$ a los otros dos ángulos exteriores del $\triangle ABC$, como se muestra en Figura 16.2.

Como $\angle\alpha$ y $\angle BAC$ son adyacentes, $\angle\alpha + \angle BAC = 180°$. Luego,

$$\angle BAC = 180° - \angle\alpha = 180° - 135° = 45°.$$

Como $\angle\alpha = \angle ABC + \angle BCA$, ya que $\angle\alpha$ es exterior no adyacente ni a $\angle ABC$ ni a $\angle BCA$, entonces

$$\angle BCA = \angle\alpha - \angle ABC = 135° - 35° = 100°.$$

Luego, los ángulos interiores del triángulo, $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$, miden 45°, 35° y 100° respectivamente.

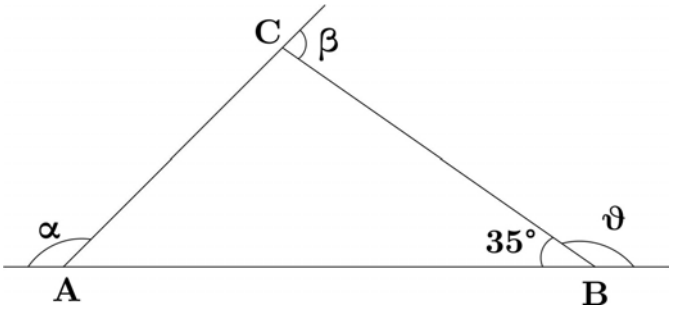


Figura 16.3

Como $\angle\beta$ es un ángulo exterior del triángulo no adyacente a $\angle BAC$ ni a $\angle ABC$ entonces,

$$\angle\beta = \angle BAC + \angle ABC = 45° + 35° = 80°.$$

Como $\angle\upsilon$ es un ángulo exterior del triángulo no adyacente a $\angle BAC$ ni a $\angle BCA$ entonces,

$$\angle\upsilon = \angle BAC + \angle BCA = 45° + 100° = 145°.$$

Estos últimos dos ángulos también se podrían hallar teniendo en cuenta que $\angle\beta + \angle BCA = 180°$ por ser $\angle\beta$ y $\angle BCA$ adyacentes y que $\angle\upsilon + \angle ABC = 180°$ por ser $\angle\upsilon$ y $\angle ABC$ adyacentes.

Luego, los ángulos exteriores del triángulo, $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\upsilon$, miden 135°, 80° y 145° respectivamente.

Observemos que la suma de las medidas de los ángulos exteriores del triángulo es 360°:

$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\upsilon = 135° + 80° + 145° = 360°.$$

Ejemplo 16.2

En el triángulo $\triangle ABC$ de la Figura 16.4, hallar $\angle 1$ y $\angle 2$.

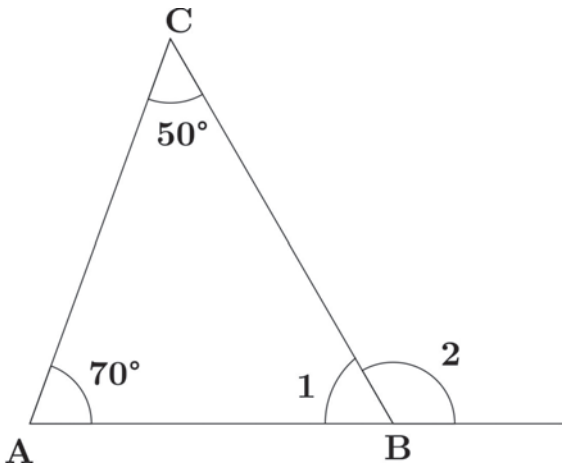


Figura 16.4

Solución

Como $\angle A + \angle 1 + \angle C = 180°$ porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, entonces

$$\begin{aligned}\angle 1 &= 180° - \angle A - \angle C \\ &= 180° - 70° - 50° \\ &= 60°.\end{aligned}$$

Como $\angle 2 = \angle A + \angle C$ por ser $\angle 2$ un ángulo exterior no adyacente ni a $\angle A$ ni a $\angle C$ del $\triangle ABC$, entonces

$$\angle 2 = 70° + 50° = 120°.$$

Este último ángulo también se podría hallar teniendo en cuenta que $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ porque $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un ángulo llano.

Luego, $\angle 1 = 60°$ y $\angle 2 = 120°$.

Ejemplo 16.3

Hallar $\angle 1$ y $\angle 2$ de la Figura 16.5, si $\angle 3 = 140°$ y $\angle C = 60°$.

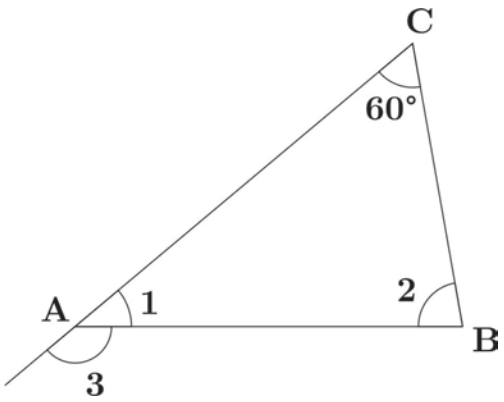


Figura 16.5

Solución

Como $\angle 3 = \angle C + \angle 2$ por ser el $\angle 3$ un ángulo exterior no adyacente ni a $\angle 2$ ni a $\angle C$ del $\triangle ABC$, entonces

$$\begin{aligned} \angle 2 &= \angle 3 - \angle C \\ &= 140^\circ - 60^\circ \\ &= 80^\circ. \end{aligned}$$

Como $\angle 1$ y $\angle 3$ forman un ángulo llano, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ y así

$$\begin{aligned} \angle 1 &= 180^\circ - \angle 3 \\ &= 180^\circ - 140^\circ \\ &= 40^\circ. \end{aligned}$$

Luego, $\angle 1 = 40^\circ$ y $\angle 2 = 80^\circ$.

Ejemplo 16.4

En la Figura 16.6, $\angle D = 150^\circ$, $\angle 5 = 20^\circ$, $\overrightarrow{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$ y $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz del $\angle B$. Hallar $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 6$.

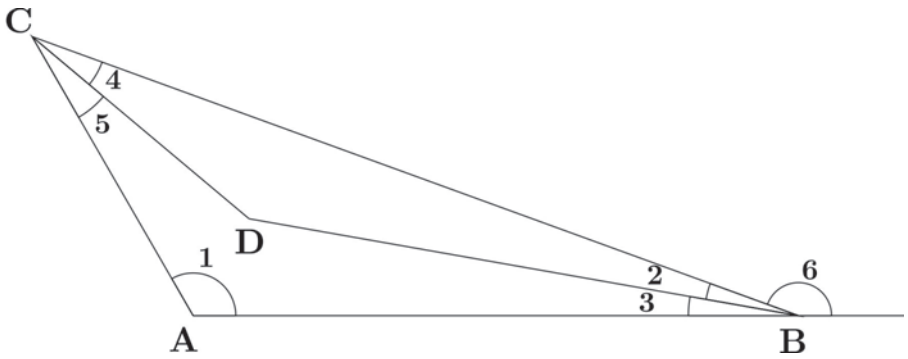


Figura 16.6

Solución

Como $\angle 4 \cong \angle 5$ por ser $\overrightarrow{CD}$ la bisectriz del $\angle C$ y $\angle 5 = 20°$, entonces $\angle 4 = 20°$ y $\angle C = \angle 4 + \angle 5 = 40°$.

Puesto que $\angle 4$, $\angle D$ y $\angle 2$ son los ángulos interiores del $\triangle CDB$, entonces $\angle 4 + \angle D + \angle 2 = 180°$ y por tanto

$$\begin{aligned} \angle 2 &= 180° - \angle 4 - \angle D \\ &= 180° - 20° - 150° \\ &= 10°. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz del $\angle B$, entonces $\angle B = 2\angle 2 = 2(10°) = 20°$.

Los ángulos $\angle 1$, $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos interiores del $\triangle ABC$. Luego, $\angle 1 + \angle B + \angle C = 180°$ y así

$$\begin{aligned} \angle 1 &= 180° - \angle B - \angle C \\ &= 180° - 20° - 40° \\ &= 120°. \end{aligned}$$

El $\angle 6$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$. Luego, $\angle 6 = \angle 1 + \angle C = 120° + 40° = 160°$.

Por tanto, $\angle 1 = 120°$, $\angle 2 = 10°$ y $\angle 6 = 160°$.

Ejercicios propuestos

1. En el $\triangle ABC$ de la Figura 16.7, los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ miden respectivamente 35° y 25°.

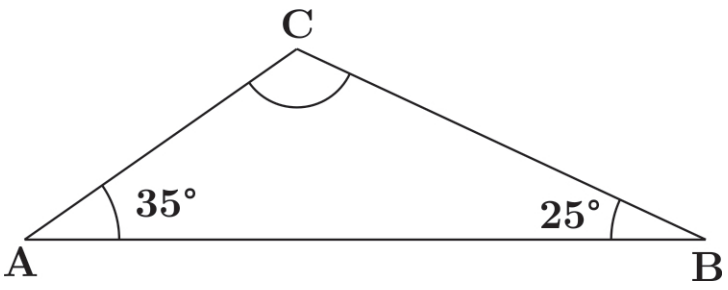


Figura 16.7

   (a) Hallar la medida del $\angle C$.

   (b) Trazar los ángulos exteriores del $\triangle ABC$ y hallar sus medidas.

2. Consideremos el $\triangle ABC$ de la Figura 16.8 con $\angle A = (10x)°$, $\angle B = (15x - 10)°$ y $\angle BCD = (20x + 25)°$.

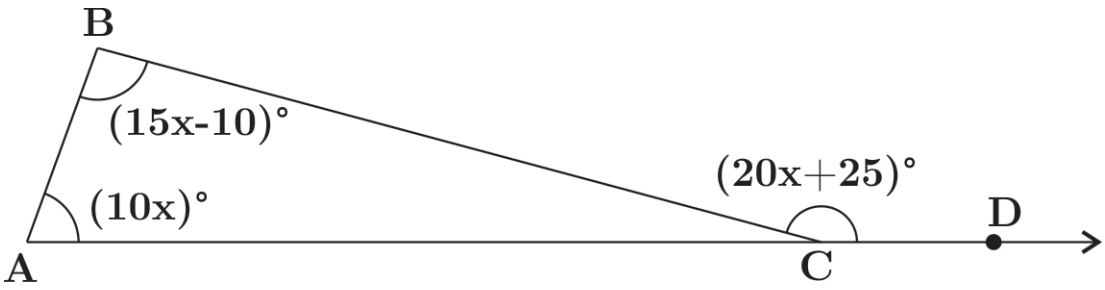


Figura 16.8

(a) Hallar la medida del ángulo exterior $\angle BCD$.

(b) Trazar los otros dos ángulos exteriores del $\triangle ABC$ y hallar su medida.

3. Consideremos el $\triangle ABC$ de la Figura 16.9.

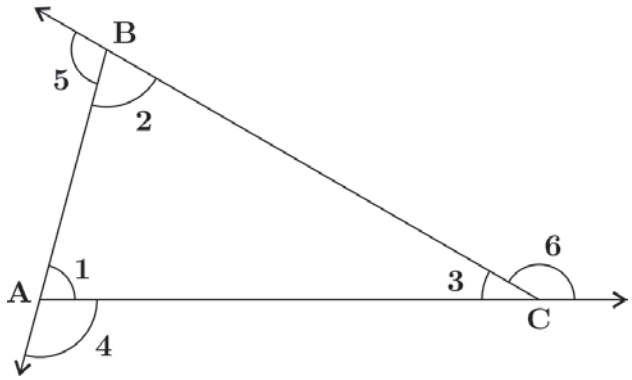


Figura 16.9

Probar que $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$.

Respuestas

1. (a) 120°.

(b) En la Figura 16.10, se muestran los ángulos exteriores $\angle\alpha$, $\angle\beta$ y $\angle\gamma$, cuyas medidas son respectivamente 145°, 155° y 60°.

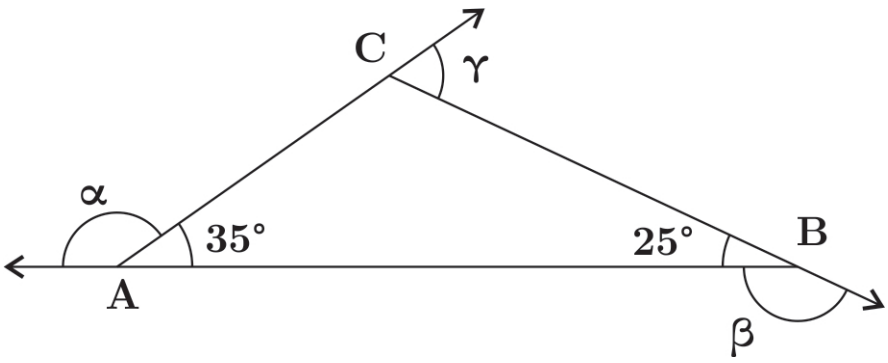


Figura 16.10

2. (a) 165°.

   (b) En la Figura 16.11, se muestran los otros dos ángulos exteriores $\angle EAC$ y $\angle ABF$ del $\triangle ABC$ cuyas medidas son 110° y 85° respectivamente.

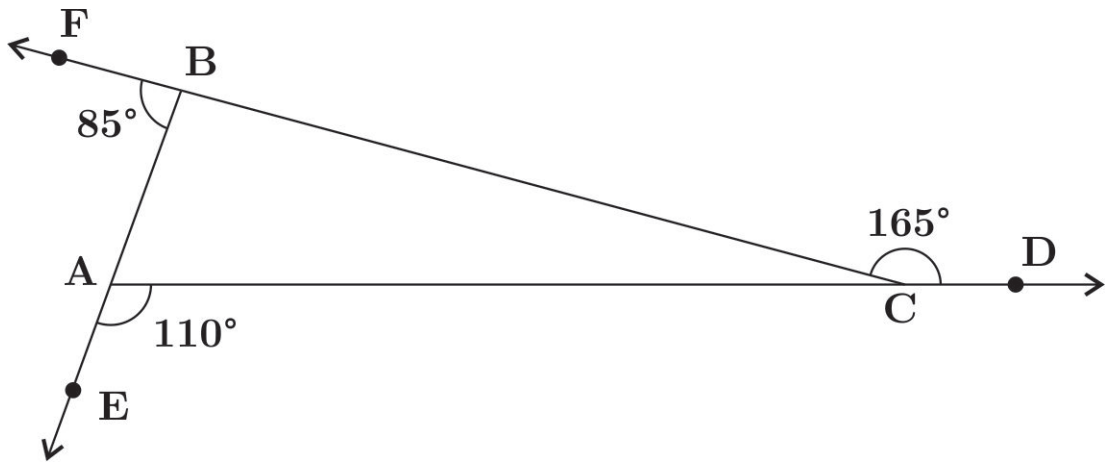


Figura 16.11

3. Ayuda: tener en cuenta que $\angle 1$ y $\angle 4$ son suplementarios al igual que $\angle 2$ y $\angle 5$ y que $\angle 3$ y $\angle 6$.

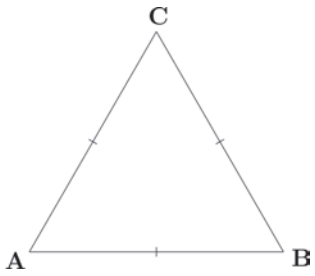
Lección 17

Clasificación de triángulos

En esta lección veremos la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos.

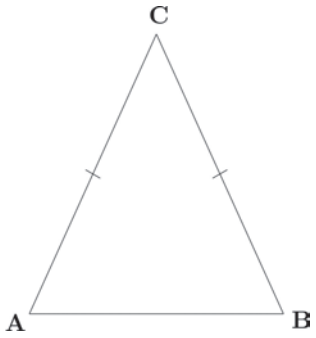
Según la medida de sus lados, los triángulos se clasifican en:

- **Triángulo equilátero**: es el que tiene los tres lados congruentes.
- **Triángulo isósceles**: es el que tiene dos lados congruentes.
- **Triángulo escaleno**: es el que tiene los tres lados de diferente medida.



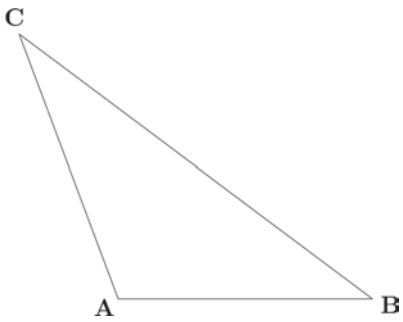
$\triangle ABC$ equilátero

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$



$\triangle ABC$ isósceles

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$



$\triangle ABC$ escaleno

Figura 17.1

En un triángulo isósceles, el ángulo formado por los dos lados congruentes se llama **ángulo del vértice** y el lado opuesto se llama **base** del triángulo. En nuestro dibujo central de la Figura 17.1 $\overline{AB}$ es la base y $\angle C$ es el ángulo del vértice.

Respecto a sus ángulos, estos triángulos tienen las siguientes propiedades, algunas de las cuales probaremos más adelante:

- En un triángulo equilátero, los tres ángulos también son congruentes.
- En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes.
- En un triángulo escaleno no hay dos ángulos que tengan la misma medida.

En general, se cumple que en un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes, como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 17.1

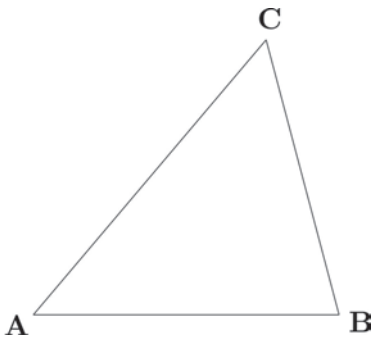
En un triángulo, ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.

Nota 17.1

La prueba de este teorema se hará cuando veamos congruencia de triángulos.

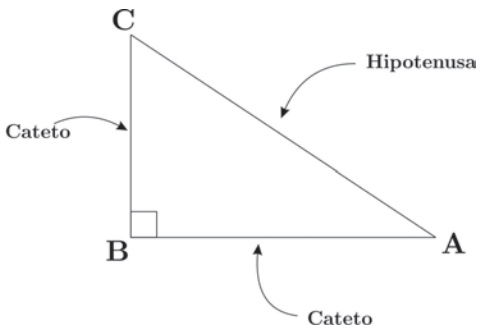
Según la medida de sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

- **Triángulo acutángulo**: es el que tiene los tres ángulos agudos.
- **Triángulo rectángulo**: es el que tiene un ángulo recto.
- **Triángulo obtusángulo**: es el que tiene un ángulo obtuso.
- **Triángulo equiángulo**: es el que tiene los tres ángulos congruentes.



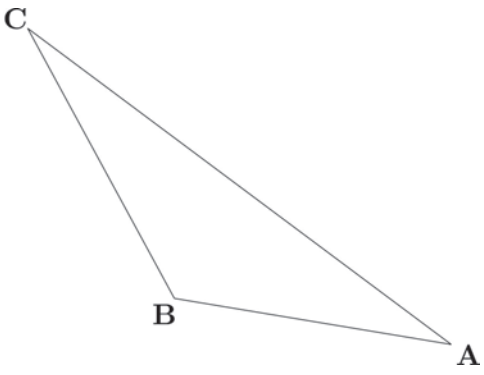
$\triangle ABC$ acutángulo

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ agudos



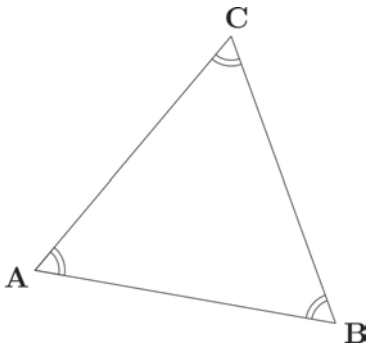
$\triangle ABC$ rectángulo

$\angle B = 90°$



$\triangle ABC$ obtusángulo

$\angle B$ obtuso



$\triangle ABC$ equiángulo

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

Figura 17.2

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**. Así, en nuestro dibujo situado en la parte superior derecha de la Figura 17.2, $\overline{AC}$ es la hipotenusa y $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los catetos.

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, entonces la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°.

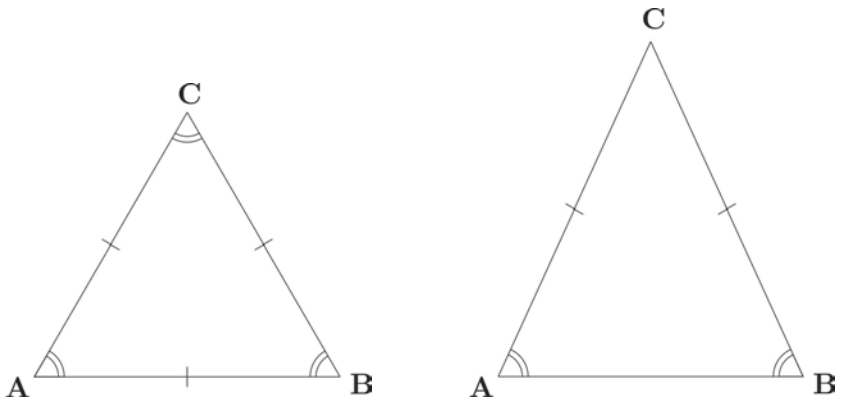
El siguiente resultado, conocido como recíproco del Teorema 17.1, también es válido y su prueba puede hacerse con congruencia de triángulos.

Teorema 17.2

En un triángulo, lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes.

Como consecuencia de los Teoremas 17.1 y 17.2 podemos afirmar:

- Todo triangulo equilátero es equiángulo. ¿Cuántos grados mide cada uno de sus ángulos?
- Todo triángulo equiángulo es equilátero.
- Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes entonces es un triángulo isósceles.



$\triangle ABC$ equilátero y equiángulo

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

$\triangle ABC$ isósceles

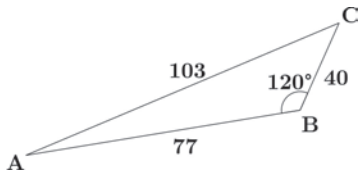
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\angle A \cong \angle B$

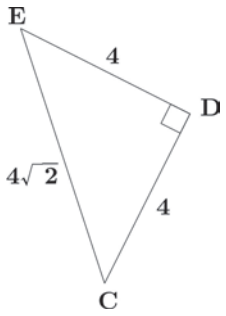
Figura 17.3

Ejemplo 17.1

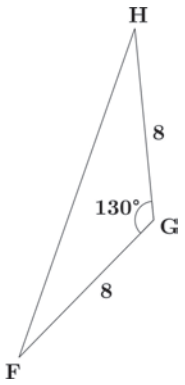
Clasificar según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos, cada uno de los triángulos de la Figura 17.4.



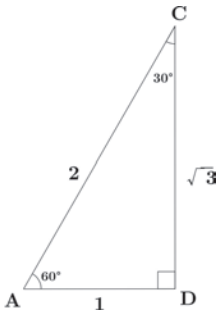
1. $\triangle ABC$



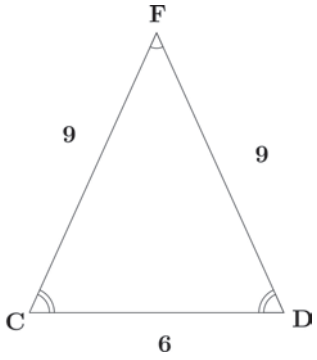
2. $\triangle CDE$



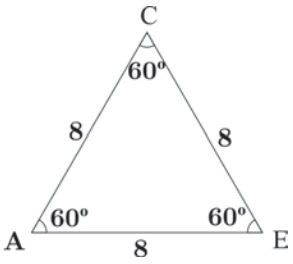
3. $\triangle FGH$



4. $\triangle ADC$



5. $\triangle CDF$



6. $\triangle AEC$

Figura 17.4

Solución

1. El $\triangle ABC$ es escaleno y obtusángulo porque sus tres lados tienen diferente medida y tiene un ángulo obtuso.

2. El $\triangle CDE$ es isósceles y rectángulo porque tiene dos lados congruentes y un ángulo recto.

3. El $\triangle FGH$ es isósceles y obtusángulo porque tiene dos lados congruentes y un ángulo obtuso.

4. El $\triangle ADC$ es escaleno y rectángulo porque sus tres lados tienen diferente medida y tiene un ángulo recto.

5. El $\triangle CDF$ es isósceles y acutángulo porque tiene dos lados congruentes y sus tres ángulos son agudos.

6. El $\triangle AEC$ es equilátero y equiángulo porque tiene los tres lados congruentes y los tres ángulos congruentes.

Ejemplo 17.2

En la Figura 17.5,

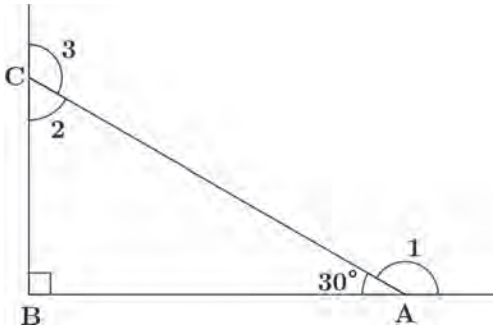


Figura 17.5

$\triangle ABC$ es rectángulo con $\angle B$ recto.

Hallar $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$.

Solución

Como $\angle BAC + \angle 2 = 90°$ por ser la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces

$$\begin{aligned}\angle 2 &= 90° - \angle BAC \\ &= 90° - 30° \\ &= 60°.\end{aligned}$$

Como $\angle 1 = \angle B + \angle 2$ por ser $\angle 1$ un ángulo exterior del $\triangle ABC$, entonces

$$\angle 1 = 90° + 60° = 150°.$$

Como $\angle 3 = \angle B + \angle BAC$ por ser $\angle 3$ un ángulo exterior del $\triangle ABC$, entonces

$$\angle 3 = 90° + 30° = 120°.$$

Luego, $\angle 1 = 150°$, $\angle 2 = 60°$ y $\angle 3 = 120°$.

Ejemplo 17.3

En la Figura 17.6, si el $\triangle ABC$ es rectángulo con $\angle B$ recto, el $\triangle CAD$ es isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y si B, A y E son puntos colineales, hallar $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$.

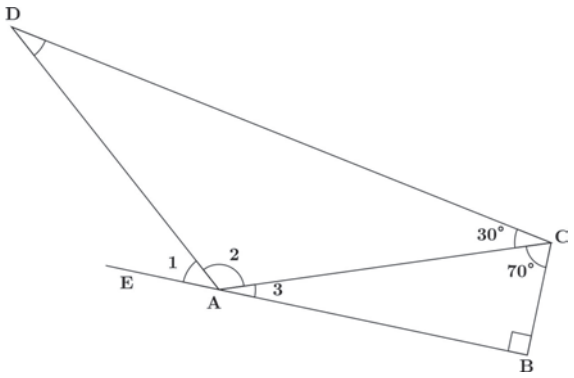


Figura 17.6

Solución

Como el $\triangle CAD$ es isósceles, los ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes y como $\angle ACD = 30°$, entonces $\angle D = 30°$.

Como $\angle D + \angle 2 + \angle ACD = 180°$ por ser la suma de los ángulos interiores del $\triangle CAD$, entonces

$$\begin{aligned}\angle 2 &= 180° - \angle D - \angle ACD \\ &= 180° - 30° - 30° \\ &= 120°.\end{aligned}$$

Como $\angle 3 + \angle ACB = 90°$ por ser la suma de los ángulos agudos del $\triangle ABC$ rectángulo, entonces

$$\begin{aligned}\angle 3 &= 90° - \angle ACB \\ &= 90° - 70° \\ &= 20°.\end{aligned}$$

Como $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ forman un ángulo llano, por ser B, A y E puntos colineales, entonces $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ y así

$$\begin{aligned}\angle 1 &= 180° - \angle 2 - \angle 3 \\ &= 180° - 120° - 20° \\ &= 40°.\end{aligned}$$

Luego, $\angle 1 = 40°$, $\angle 2 = 120°$ y $\angle 3 = 20°$.

Ejemplo 17.4

En la Figura 17.7,

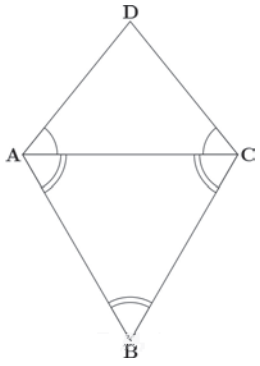


Figura 17.7

1. Indicar cuáles son los lados congruentes.
2. Clasificar los triángulos según sus lados.

Solución

1. Como en el $\triangle ADC$ los ángulos $\angle DAC$ y $\angle DCA$ son congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes, esto es,

$$\overline{AD} \cong \overline{CD}.$$

Como el $\triangle ABC$ es equiángulo y como los lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes, entonces

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}.$$

2. Como $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, entonces el $\triangle ADC$ es isósceles.

Como $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$, entonces el $\triangle ABC$ es equilátero.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 17.8,

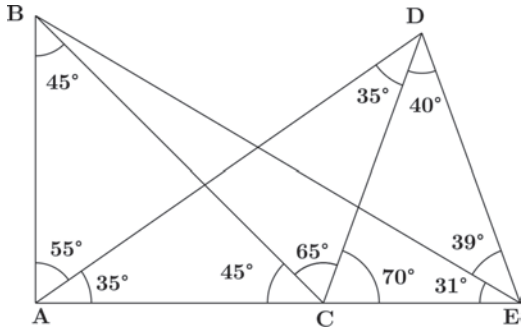


Figura 17.8

   (a) Indicar tres triángulos que sean isósceles.

   (b) Indicar tres triángulos que sean escalenos.

   (c) Indicar un triángulo que sea rectángulo e isósceles.

   (d) Clasificar los siguientes triángulos teniendo en cuenta la medida de sus ángulos: $\triangle CDE$, $\triangle ECB$, $\triangle EAB$, $\triangle AED$, $\triangle CAB$ y $\triangle ACD$.

2. Con base en la información suministrada en la Figura 17.9, hallar $\angle ACB$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ y $\angle ABD$.

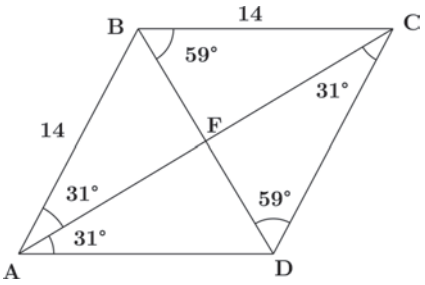


Figura 17.9

3. Consideremos el $\triangle ABC$ de la Figura 17.10, con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Si los puntos D, A, B y E son colineales, H, A y C son colineales y F, B y C son colineales, probar:

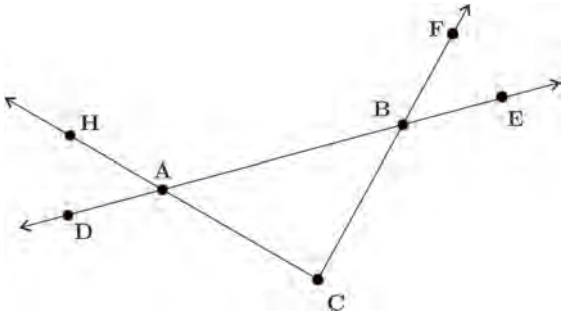


Figura 17.10

(a) $\angle DAC \cong \angle EBC$.

(b) $\angle DAH \cong \angle EBF$.

Respuestas

1. (a) $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ y $\triangle CED$.

   (b) $\triangle ABE$, $\triangle CBE$ y $\triangle ADE$.

   (c) $\triangle ABC$.

   (d) $\triangle CDE$ es acutángulo, $\triangle ECB$ es obtusángulo, $\triangle EAB$ es rectángulo, $\triangle AED$ es acutángulo, $\triangle CAB$ es rectángulo y $\triangle ACD$ es obtusángulo.

2. $\angle ACB = 31°$, $\overline{DC} = 14$, $\overline{AD} = 14$ y $\angle ABD = 59°$.

3. Ayuda: recordar las propiedades de los ángulos de un triángulo isósceles.

Lección 18

Construcción de triángulos

En esta lección aprenderemos a construir un triángulo dadas algunas condiciones que se requieren para que la construcción sea posible.

¿Cómo construir un triángulo?

Al hablar de un triángulo, nos referimos a sus tres ángulos y a sus tres lados como los **elementos** del triángulo.

Un triángulo puede construirse siempre que se conozcan tres de sus elementos de los cuales por lo menos uno sea un lado y los elementos dados cumplan algunas condiciones.

Consideremos cuatro casos:

Construcción 18.1

Construir un triángulo conocidos un lado y los ángulos adyacentes.

Tracemos un triángulo ABC dados el lado $\overline{BC}$, de medida a, y los ángulos B y C de la Figura 18.1.

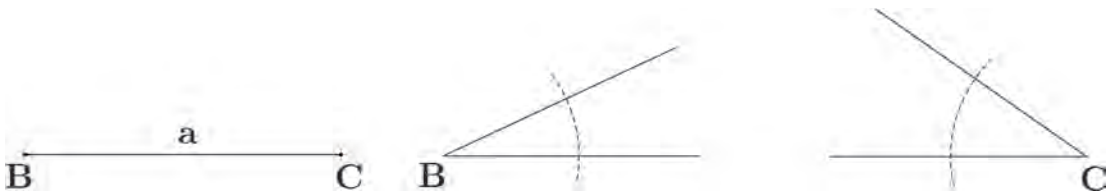


Figura 18.1

Trazamos un segmento de recta $\overline{BC}$ de medida a.

En sus extemos construimos ángulos congruentes a los $\angle B$ y $\angle C$ dados, como se muestra en la Figura 18.2.

Prolongamos los lados de estos ángulos hasta que se corten, para obtener el vértice A.

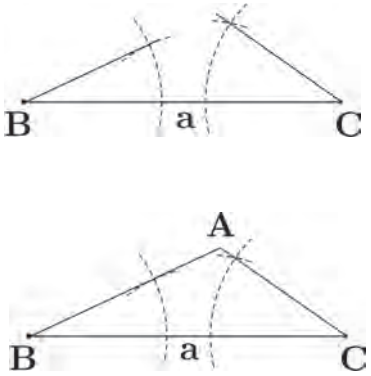


Figura 18.2

Nota 18.1

Para que esta construcción sea posible, la suma de los ángulos dados debe ser menor que 180°.

Construcción 18.2

Construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo formado por ellos

Tracemos un triángulo ABC dados los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, cuyas medidas son b y a respectivamente, y el ángulo C de la Figura 18.3.

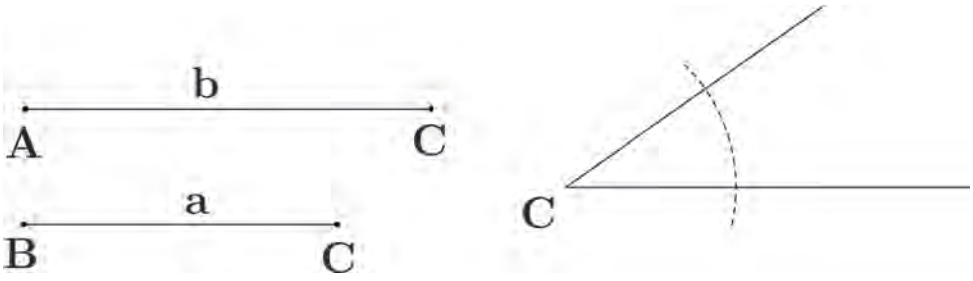


Figura 18.3

Trazamos un ángulo congruente con el $\angle C$.

A partir del vértice C, sobre los lados del ángulo trazamos los segmentos de recta $\overline{CB}$ y $\overline{CA}$, cuyas medidas son a y b respectivamente, como se muestra en la Figura 18.4.

Unimos los extremos A y B para obtener el tercer lado del triángulo.

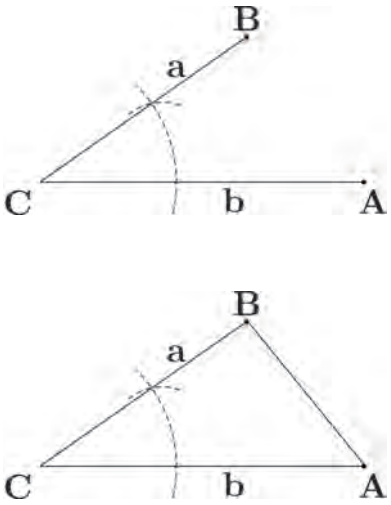


Figura 18.4

Nota 18.2

Siempre es posible hacer esta construcción cuando el ángulo dado sea menor que un ángulo llano.

Ejemplo 18.1

Construir un triángulo $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle B$ recto, que tenga un ángulo agudo de 50° y un cateto que mida $6\,cm$.

Solución

Para construir el triángulo $\triangle ABC$ rectángulo pedido, procedemos así:

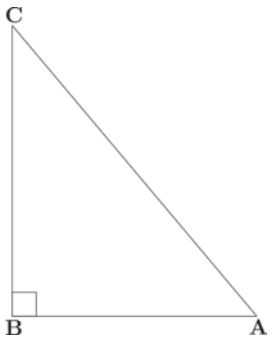


Figura 18.5

Trazamos el cateto $\overline{BA}$ de $6\,cm$.

En sus extremos, con regla y transportador, trazamos el ángulo recto B y el ángulo de 50°.

Prolongamos los lados de estos ángulos hasta que se corten para obtener el vértice C, como se muestra en la Figura 18.5.

Construcción 18.3

Construir un triángulo dados sus tres lados.

Tracemos un triángulo ABC dados los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ de la Figura 18.6, cuyas medidas son a, b y c respectivamente.

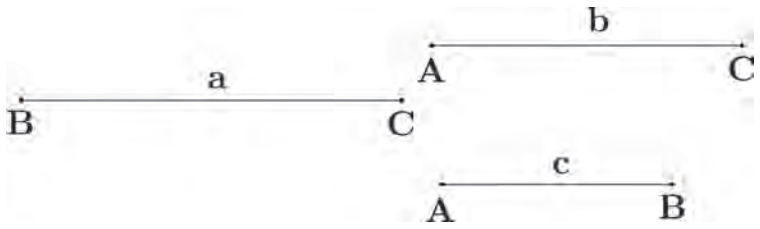


Figura 18.6

Trazamos un segmento de recta $\overline{BC}$ de longitud a.

Desde sus extremos y con radios de medidas b y c trazamos dos arcos que al cortarse determinan el tercer vértice A, como se muestra en la Figura 18.7.

Unimos el vértice A con los extremos del segmento $\overline{BC}$ y obtenemos los otros dos lados del triángulo.

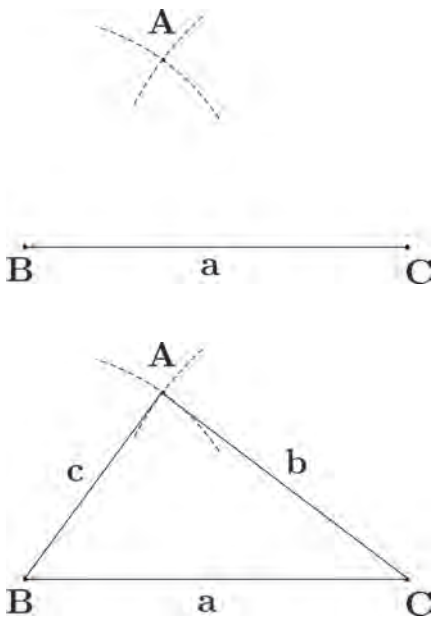


Figura 18.7

Nota 18.3

En todo triángulo, la medida de cualquier lado es menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia. Así entonces, la condición para que dados tres segmentos de recta se pueda construir un triángulo con ellos es que la medida de cualquiera de los segmentos sea menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia.

Ejemplo 18.2

Construir un triángulo $\triangle ABC$ isósceles tal que la suma de las medidas de sus lados, llamada perímetro del triángulo, sea $15\,cm$ y uno de los lados congruentes mida $5,5\,cm$.

Solución

Como un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes, entonces debemos construir un triángulo con dos lados de medida $5,5\,cm$ cada uno y como el perímetro del triángulo es $15\,cm$, el tercer lado debe medir $15 - 2(5,5) = 4\,cm$. Para ello:

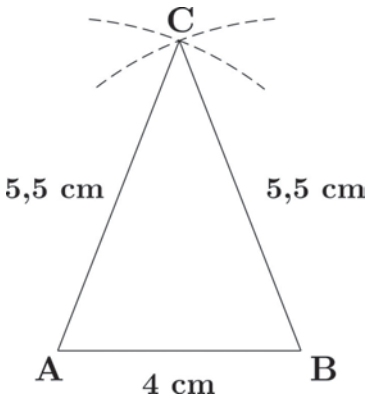


Figura 18.8

Trazamos un segmento $\overline{AB}$ de $4\,cm$.

Con centro en cada uno de los extremos de este segmento y radio $5,5\,cm$ trazamos un arco.

El punto de corte de estos dos arcos es el tercer vértice C.

Unimos C con A y B y obtenemos el $\triangle ABC$ que se muestra en la Figura 18.8.

Construcción 18.4

Construir un triángulo conocidos dos lados y uno de los ángulos que no es el formado por ellos.

En este caso se pueden presentar tres situaciones:

1. No se puede construir el triángulo.
2. Existe un único triángulo que se puede construir.
3. Existen dos triángulos que se pueden construir.

Expliquemos cada una.

Supongamos que la medida del lado $\overline{AB}$ es c, la del lado $\overline{AC}$ es b y que conocemos el ángulo $\angle B$, como se muestra en la Figura 18.9.

Figura 18.9

Tracemos un ángulo congruente con el $\angle B$.

A partir del vértice B, sobre uno de los lados del ángulo trazamos el segmento de recta $\overline{BA}$ de medida c.

Desde el extremo A y con radio de medida b tracemos un arco como se muestra en la Figura 18.10 .

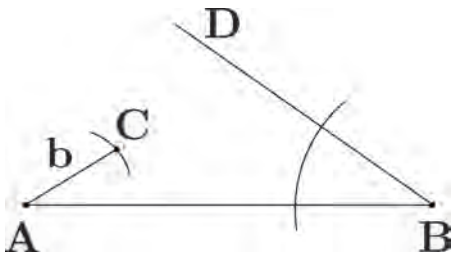


Figura 18.10

Puede ocurrir:

1. La medida b es menor que la distancia de A a $\overline{BD}$ y entonces el arco trazado con centro en A y radio de medida b no corta el otro lado $\overline{BD}$ del ángulo $\angle B$ y en este caso no existe un triángulo que cumpla las condiciones.

2. Si b es justamente la distancia de A al otro lado $\overline{BD}$ del ángulo, existe un único triángulo que cumple las condiciones.

3. Si b es más grande que la distancia de A a $\overline{BD}$, existen dos triángulos que cumplen las condiciones.

Nota 18.4

Observemos que en el caso anterior el ángulo $\angle B$ es agudo. Investigar ¿qué ocurre si $\angle B$ es obtuso?, ¿cómo debe ser la medida de $\overline{AC}$ con respecto a la de $\overline{AB}$, para que exista un triángulo?

Ejercicios propuestos

1. Construir un triángulo $\triangle ABC$ cuyos lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ midan 5 cm y 3.5 cm respectivamente y el $\angle C$ entre ellos mida 55°.

2. De los siguientes grupos de segmentos de recta cuyas medidas se dan en cada literal, decir con cuáles se puede construir un triángulo y en caso afirmativo hacer la construcción:

   (a) 2 cm, 4 cm y 7 cm.

   (b) 9 cm, 3 cm y 5 cm.

   (c) 4 cm, 5 cm y 6 cm.

   (d) 0.7 cm, 2.5 cm y 3.2 cm.

3. Construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 5 cm y uno de sus catetos mida 4 cm.

4. Construir un triángulo $\triangle ABC$ cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ midan 7 cm y 5 cm respectivamente y el $\angle B$ mida 35°.

Respuestas

1.

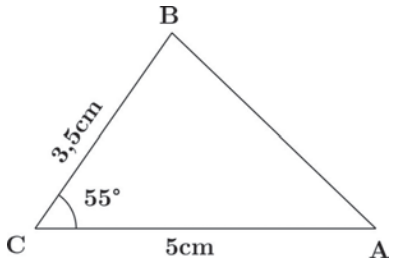


Figura 18.11

2. (a) No, porque 2 es menor que $7 - 4 = 3$.

   (b) No, porque 9 es mayor que $3 + 5 = 8$.

   (c) Si, porque la medida de cada segmento es menor que la suma de las medidas de los otros dos y mayor que su diferencia.

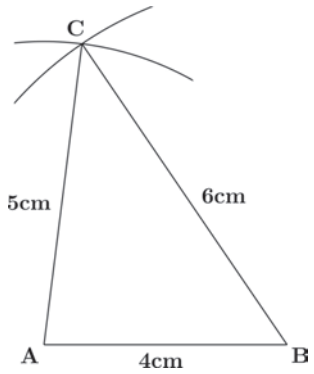


Figura 18.12

(d) No, porque $0.7 = 3.2 - 2.5$.

3.

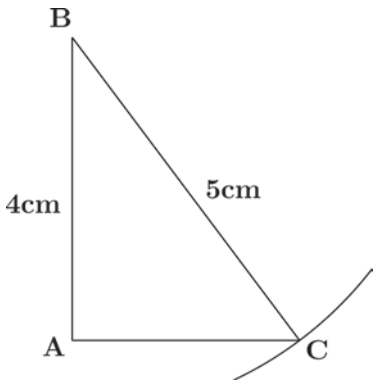


Figura 18.13

4. Se pueden construir dos triángulos: $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$, como se muestra en la Figura 18.14.

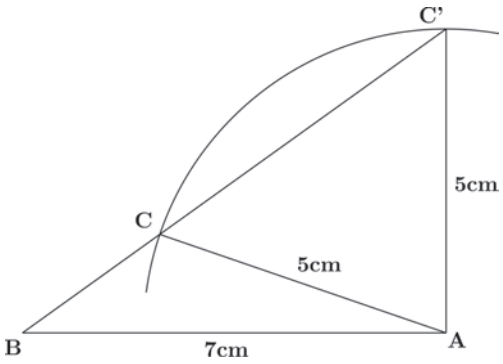


Figura 18.14

Lección 19

Congruencia de triángulos

En esta lección veremos el concepto de congruencia de triángulos, el primer criterio para probarla y su aplicación a casos especiales de triángulos isósceles y rectángulos.

Dos triángulos son **congruentes** si los tres lados de uno son respectivamente congruentes con los tres lados del otro y los tres ángulos de uno son respectivamente congruentes con los tres ángulos del otro.

Para denotar que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes, escribimos

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

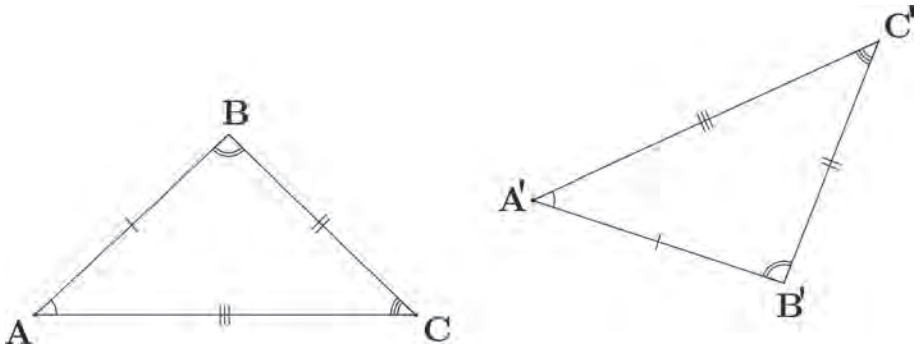


Figura 19.1

Si

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\ ,\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\ \ ,\ \overline{CA} \cong \overline{C'A'}\ \text{ y}$$
$$\angle A \cong \angle A'\ \ ,\ \angle B \cong \angle B'\ \ ,\ \angle C \cong \angle C',$$

entonces,

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Notas 19.1

- Dos triángulos congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño.
- Nos referiremos a los elementos que son **congruentes** en dos triángulos, como elementos **correspondientes**.

Observemos las señales que colocamos en los lados y en los ángulos de la Figura 19.1 para mostrar que son congruentes.

Observemos también el orden de las letras. En general se escriben los ángulos correspondientes en el mismo orden, aunque esto no es obligatorio.

- Si superponemos los elementos correspondientes de dos triángulos congruentes, éstos coinciden.

Para probar que dos triángulos son congruentes, no es necesario mostrar la congruencia de todos sus lados y de todos sus ángulos. Hay tres criterios, llamados criterios de congruencia de triángulos, que permiten probar la congruencia con menos información. En esta lección veremos el primero.

Primer criterio de congruencia de triángulos

Criterio **lado, ángulo, lado**, denotado **L-A-L**

Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en uno de los triángulos, son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en el otro triángulo.

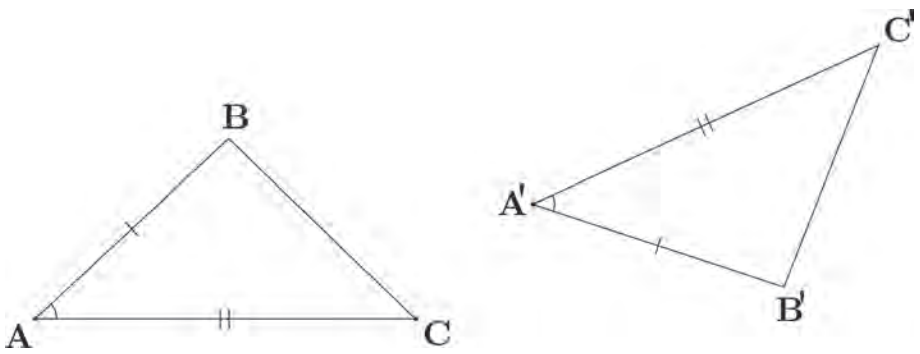


Figura 19.2

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'},\ \angle A \cong \angle A'$$
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Este criterio nos permite probar el siguiente resultado, que es el mismo enunciado antes como: "En un triángulo, ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes".

Teorema 19.1

Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

Prueba

Consideremos el triángulo isósceles $\triangle ABC$, con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Tracemos la bisectriz $\overrightarrow{BD}$ del $\angle ABC$, como se muestra en la Figura 19.3.

Debemos probar que

$$\angle A \cong \angle C.$$

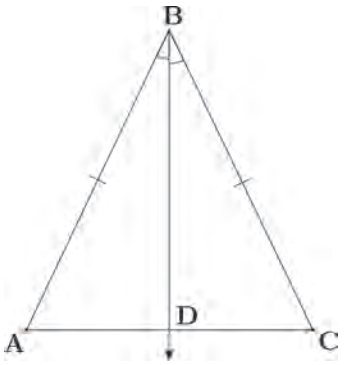


Figura 19.3

$\triangle ABC$, $\overrightarrow{BD}$ bisectriz

Como

$\overrightarrow{BD}$ es un lado común a ambos triángulos,

$\angle ABD \cong \angle CBD$ por ser $\overrightarrow{BD}$ bisectriz de $\angle ABC$ y

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ por ser los lados congruentes del $\triangle ABC$ isósceles,

entonces

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$ por el criterio de congruencia **L-A-L**.

Luego, $\angle A \cong \angle C$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Ejemplo 19.1

En la Figura 19.4, si M es el punto medio de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, hallar z y w.

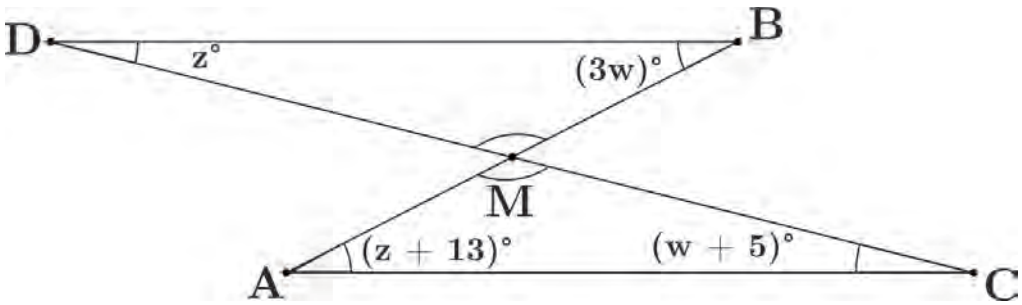


Figura 19.4

Solución

Como

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$, por ser M punto medio de $\overline{AB}$,

$\angle AMC \cong \angle DMB$, por ser opuestos por el vértice y

$\overline{CM} \cong \overline{MD}$, por ser M punto medio de $\overline{CD}$,

entonces

$\triangle CMA \cong \triangle DMB$, por el criterio de congruencia **L-A-L**.

Por tanto, los ángulos correspondientes son congruentes, es decir, $\angle DBM \cong \angle CAM$ y así

$$3w = z + 13 \tag{19.1}$$

y $\angle BDM \cong \angle ACM$, luego

$$z = w + 5 \tag{19.2}$$

Reemplazando la Ecuación19.2 en la Ecuación19.1 tenemos

$$3w = (w + 5) + 13.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $w = 9$. Como $z = w + 5$, $z = 9 + 5 = 14$. Entonces, $z = 14$ y $w = 9$.

Nota 19.1

Para aplicar el criterio de congruencia **L-A-L** en triángulos rectángulos sólo se requiere la congruencia de los catetos como lo muestra el Teorema 19.2.

Teorema 19.2

Dos triángulos rectángulos son congruentes si los catetos de un triángulo son respectivamente congruentes con los catetos del otro triángulo.

Prueba

Como los catetos de un triángulo son respectivamente congruentes con los catetos del otro y como el ángulo comprendido entre ellos es un ángulo recto, por el criterio de congruencia **L-A-L** los triángulos son congruentes.

Ejemplo 19.2

En la Figura 19.5,

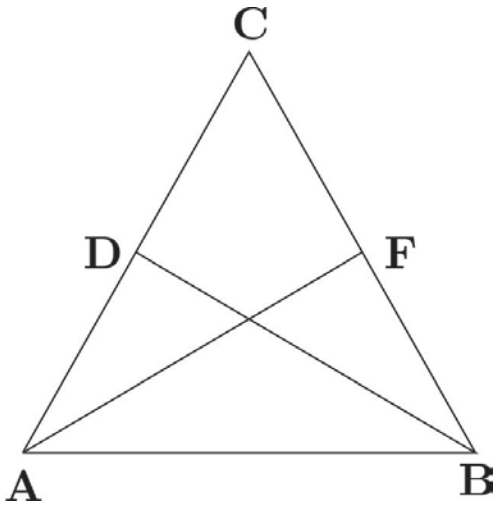


Figura 19.5

$\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y
D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Probar que:

1. $\overline{AF} \cong \overline{BD}$.
2. $\angle BAF \cong \angle ABD$.

Solución

1. Vamos a probar que $\triangle ABD \cong \triangle BAF$.

   En efecto, como

   $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ por ser lado común a los dos triángulos,

   $\angle CAB \cong \angle CBA$ por ser ángulos opuestos a lados congruentes y

   $\overline{AD} \cong \overline{BF}$, por ser D y F puntos medios de segmentos congruentes,

   entonces

   $\triangle ABD \cong \triangle BAF$ por el criterio de congruencia L-A-L.

   Luego, $\overline{AF} \cong \overline{BD}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

2. $\angle BAF \cong \angle ABD$ por ser elementos correspondientes de los triángulos congruentes $\triangle ABD$ y $\triangle BAF$.

Ejemplo 19.3

En la Figura 19.6,

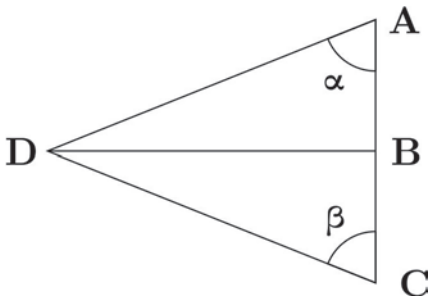


Figura 19.6

AC y BD son rectas perpendiculares entre sí y B es el punto medio de $\overline{AC}$.
Probar que $\angle\alpha \cong \angle\beta$.

Solución

Como $AC \perp BD$, $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$ son triángulos rectángulos.

Como B es punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y como $\overline{DB}$ es el lado común de los dos triángulos rectángulos $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$, éstos son congruentes por tener los dos catetos correspondientes congruentes. Luego, sus elementos correspondientes son congruentes y por tanto, $\angle\alpha \cong \angle\beta$.

Ejemplo 19.4

En la Figura 19.7, si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BE}$, encontrar el valor de x.

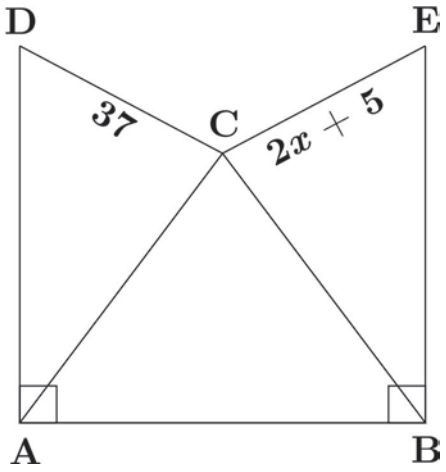


Figura 19.7

Solución

Como $\triangle ACB$ es isósceles ya que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, entonces $\angle CAB \cong \angle CBA$ por ser ángulos opuestos a lados congruentes.

Luego, $\angle EBC \cong \angle DAC$ por ser complementos de ángulos congruentes, y como $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, por el critero de congruencia L-A-L, $\triangle DAC \cong \triangle EBC$.

Por tanto, sus elementos correspondientes son congruentes, y así $\overline{DC} \cong \overline{CE}$.

Luego, reemplazando $\overline{DC}$ y $\overline{CE}$ por sus medidas obtenemos la ecuación $37 = 2x + 5$.

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 16$.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 19.8,

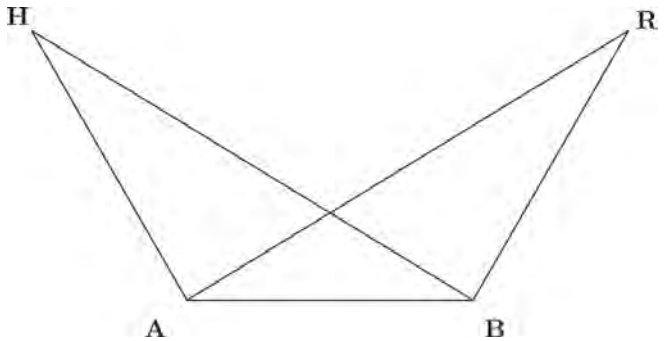


Figura 19.8

$\overline{RB} \cong \overline{HB}$,
$\angle x \cong \angle y$ y
B punto medio de $\overline{AF}$.
Probar que
$\angle R \cong \angle H$.

2. En la Figura 19.9,

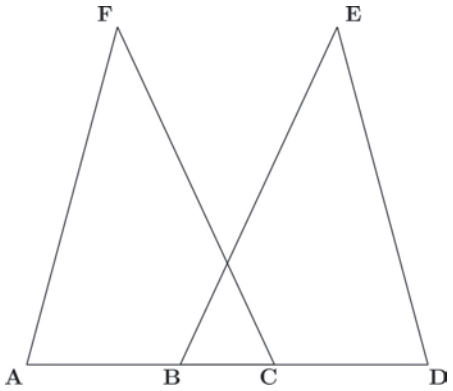


Figura 19.9

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$,
$\angle ACF \cong \angle DBE$ y
$\overline{FC} \cong \overline{EB}$.
Probar que
$\overline{AF} \cong \overline{DE}$.

3. En la Figura 19.10,

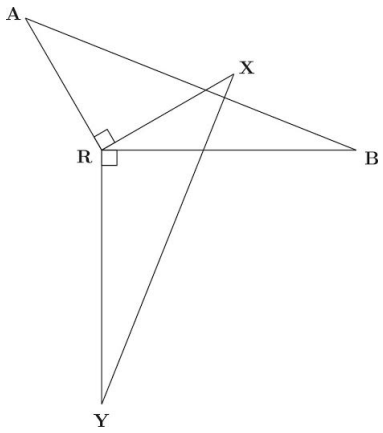


Figura 19.10

$\overline{AR} \perp \overline{RX}$, $\overline{BR} \perp \overline{RY}$,
$\overline{AR} \cong \overline{RX}$ y $\overline{BR} \cong \overline{RY}$.
Probar que
$\overline{AB} \cong \overline{XY}$.

Respuestas

1. Ayuda: probar que $\triangle ABR \cong \triangle FBH$.
2. Ayuda: demostrar que $\triangle ACF \cong \triangle DBE$.
3. Ayuda: demostrar que $\triangle ARB \cong \triangle YRX$.

Lección 20

Otros criterios de congruencia de triángulos

En esta lección veremos otros dos criterios de congruencia de triángulos y su aplicación a triángulos rectángulos.

Segundo criterio de congruencia de triángulos

Criterio **ángulo, lado, ángulo**, denotado **A-L-A**

Dos triángulos son congruentes si un lado y los ángulos adyacentes a ese lado de uno de los triángulos, son respectivamente congruentes con el lado y sus ángulos adyacentes del otro triángulo.

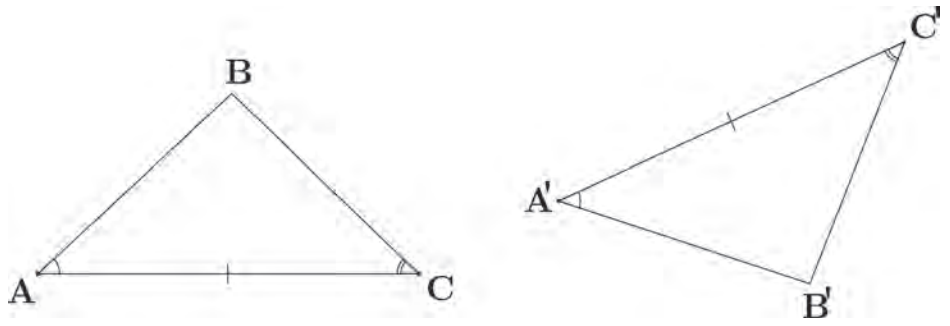


Figura 20.1

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'},\ \angle A \cong \angle A',\ \angle C \cong \angle C'$$
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Nota 20.1

Sabemos que si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo de uno es congruente con el tercer ángulo del otro, por suma de ángulos interiores de un triángulo. Luego, si dos ángulos y un lado cualquiera de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y un lado de otro triángulo, entonces, por el criterio de congruencia **A-L-A**, los triángulos son congruentes. En algunos textos este resultado aparece como criterio **ángulo, ángulo, lado**, denotado **A-A-L**.

Ejemplo 20.1

En la Figura 20.2, si E es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$, hallar los valores de x y y.

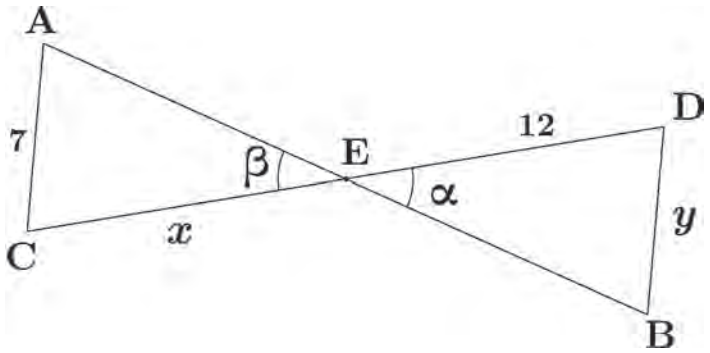


Figura 20.2

Solución

Como

$\angle\alpha \cong \angle\beta$ por ser opuestos por el vértice,

$\overline{AE} \cong \overline{EB}$ por ser E punto medio de $\overline{AB}$ y

$\angle A \cong \angle B$ por ser alternos internos entre paralelas,

entonces

$\triangle AEC \cong \triangle BED$ por el criterio de congruencia **A-L-A**.

Luego, $\overline{CE} \cong \overline{ED}$ y así $x = 12$ y $\overline{DB} \cong \overline{AC}$ y entonces $y = 7$.

Por tanto, $x = 12$ y $y = 7$.

Ejemplo 20.2

En la Figura 20.3,

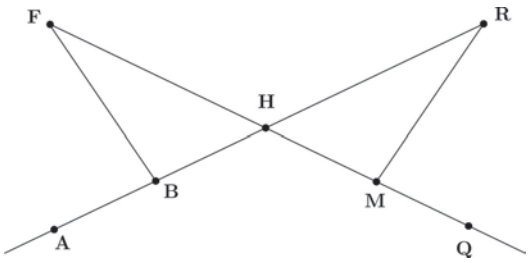


Figura 20.3

FQ y RA son rectas que se cortan en H,

$\angle FBA \cong \angle RMQ$ y $\overline{HB} \cong \overline{HM}$.

Probar que

$\overline{HF} \cong \overline{HR}$.

Solución

Como

$\angle FBH \cong \angle RMH$ por tener suplementos congruentes,

$\overline{HB} \cong \overline{HM}$ y

$\angle BHF \cong \angle MHR$ por ser opuestos por el vértice,

tenemos que

$\triangle FBH \cong \triangle RMH$ por el criterio de congruencia **A-L-A**.

Luego, $\overline{HF} \cong \overline{HR}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Nota 20.2

Para aplicar este criterio en triángulos rectángulos sólo se requiere que uno de los lados y un ángulo agudo adyacente a él en uno de los triángulos, sean congruentes respectivamente con uno de los lados y un ángulo agudo adyacente a él en el otro triángulo, como muestra el Teorema 20.1

Teorema 20.1

Dos triángulos rectángulos son congruentes si:

1. Un cateto y el ángulo agudo adyacente a él de un triángulo, son congruentes respectivamente con un cateto y el ángulo agudo adyacente a él del otro triángulo.
2. La hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo, son congruentes respectivamente con la hipotenusa y un ángulo agudo del otro triángulo.

Prueba

1. Como el ángulo agudo adyacente a uno de los catetos de un triángulo, es congruente respectivamente con el ángulo agudo adyacente a uno de los catetos del otro triángulo, y el otro ángulo adyacente al cateto es un ángulo recto, entonces los dos ángulos adyacentes al cateto son congruentes respectivamente con los del otro triángulo y como el cateto lo es, por el criterio de congruencia **A-L-A** los triángulos son congruentes.
2. Si uno de los ángulos adyacentes a la hipotenusa de un triángulo es congruente respectivamente con uno de los ángulos agudos adyacentes a la hipotenusa del otro triángulo, el otro ángulo agudo también lo será porque son el complemento de ángulos congruentes y como la hipotenusa es congruente en los dos triángulos, los triángulos son congruentes por el criterio de congruencia **A-L-A.**

Ejemplo 20.3

En la Figura 20.4,

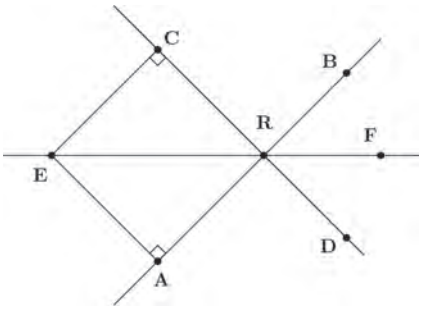


Figura 20.4

AB , CD y EF son rectas que se cortan en R,

$\angle BRF \cong \angle DRF$,

$\overline{EC} \perp \overline{CD}$ en C , $\overline{EA} \perp \overline{AB}$ en A.

Probar que

$\overline{EC} \cong \overline{EA}$.

Solución

Como

$\angle CRE \cong \angle ARE$ porque $\angle CRE \cong \angle DRF$ por ser opuestos por el vértice, $\angle ARE \cong \angle BRF$ por ser opuestos por el vértice y $\angle BRF \cong \angle DRF$,

y $\overline{ER} \cong \overline{ER}$ por ser lado común a los dos triángulos,

entonces

$\triangle ECR \cong \triangle EAR$ por ser triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.

Luego, $\overline{EC} \cong \overline{EA}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Tercer criterio de congruencia de triángulos

Criterio **lado, lado, lado**, denotado **L-L-L**

Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de los triángulos son respectivamente congruentes con los tres lados del otro triángulo.

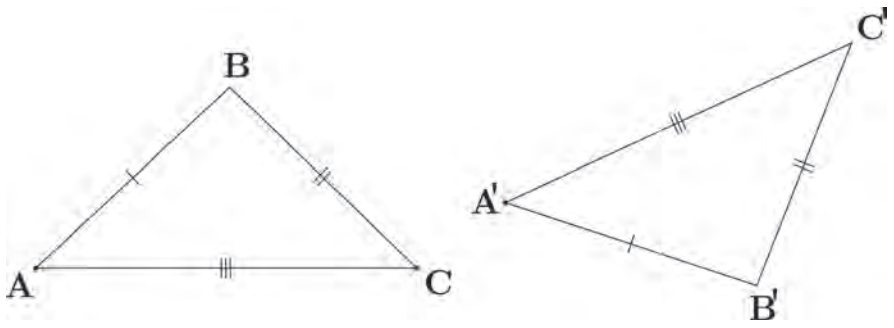


Figura 20.5

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'},\ \overline{CA} \cong \overline{C'A'}$$
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Ejemplo 20.4

En la Figura 20.6,

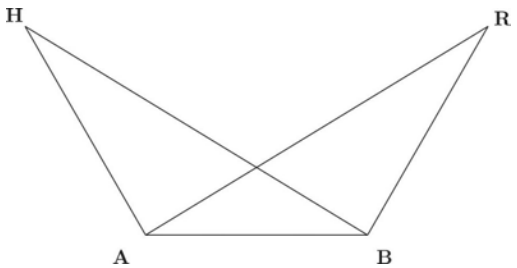


Figura 20.6

$\overline{AH} \cong \overline{BR}$ y $\overline{BH} \cong \overline{AR}$.

Probar que

$\angle H \cong \angle R$.

Solución

Como

$\overline{AH} \cong \overline{BR}$,

$\overline{BH} \cong \overline{AR}$ y

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ por ser lado común a ambos triángulos,

entonces

$\triangle ABH \cong \triangle ABR$ por el criterio de congruencia L-L-L.

Luego, $\angle H \cong \angle R$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Ejemplo 20.5

En la Figura 20.7,

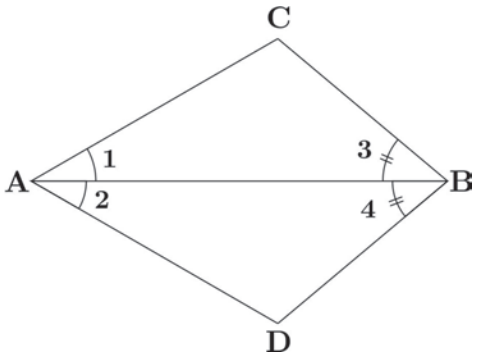


Figura 20.7

Probar, bajo las condiciones dadas en cada numeral, que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

1. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$.
2. $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$.
3. $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{BD}$.

Solución

1. Como

   $\angle 1 \cong \angle 2$,

   $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ por ser lado común a los dos triángulos y

   $\angle 3 \cong \angle 4$,

   entonces

   $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ por el criterio de congruencia A-L-A.

2. Como

   $\overline{AC} \cong \overline{AD}$,

   $\angle 1 \cong \angle 2$ y

   $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ por ser lado común a los dos triángulos,

entonces

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$ por el criterio de congruencia L-A-L.

3. Como

   $\overline{AC} \cong \overline{AD}$,

   $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ y

   $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ por ser lado común a los dos triángulos,

   entonces

   $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ por el criterio de congruencia L-L-L.

Nota 20.3

No necesariamente si en dos triángulos los ángulos de uno de los triángulos son respectivamente congruentes con los ángulos del otro triángulo, los triángulos son congruentes. Esto lo ilustramos en la Figura 20.8

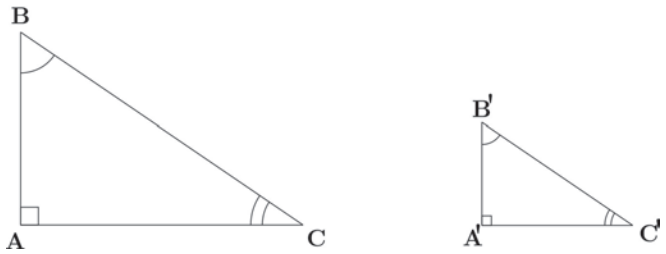


Figura 20.8

$\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$, pero los lados respectivos no son congruentes.

Observemos que estos dos triángulos tienen la misma forma pero distinto tamaño y, como veremos más adelante, estos triángulos se llaman triángulos semejantes.

Nota 20.4

Aclaramos que no hemos hecho aquí las pruebas de los criterios de congruencia de triángulos, pero es posible hacerlas.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 20.9,

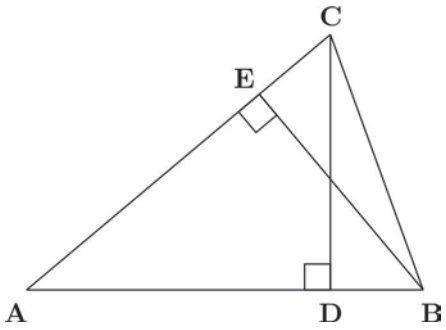


Figura 20.9

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ en E , $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ en D y $\overline{AE} \cong \overline{AD}$.

Probar que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.

2. En la Figura 20.10,

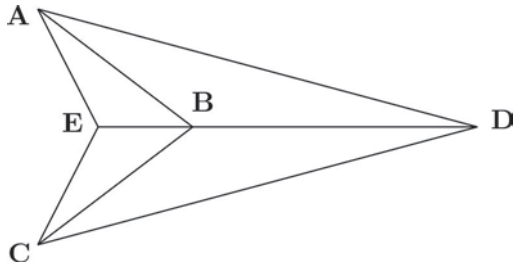


Figura 20.10

$\overline{AD} \cong \overline{CD}$,
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$
y E , B y D son puntos colineales.

Probar que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$.

3. En la Figura 20.11,

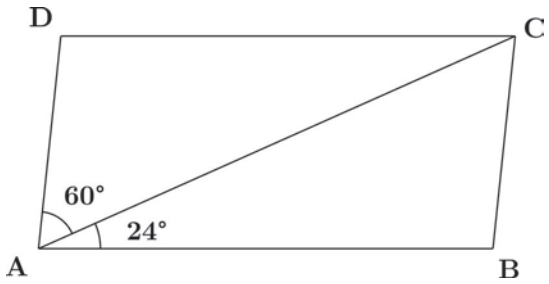


Figura 20.11

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$,
$\angle DAC = 60^o$, $\angle CAB = 24^o$,
$\angle ACD = 2x$ y $\angle ACB = 3y$.

Hallar x y y.

Respuestas

1. Ayuda: probar que $\triangle ADC \cong \triangle AEB$.
2. Ayuda: probar que $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ y que $\triangle ADE \cong \triangle CDE$.
3. $x = 12°$ y $y = 20°$.

Lección 21

Rectas en el triángulo
Alturas y Mediatrices

Las rectas más importantes o rectas notables en un triángulo son las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices. En esta lección veremos las alturas y mediatrices, sus puntos de intersección y algunas de sus propiedades.

Alturas

Una **altura** de un triángulo es el segmento de recta perpendicular trazado desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto o hasta su prolongación.

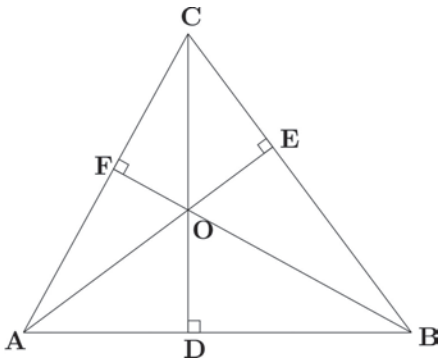


Figura 21.1

En la Figura 21.1, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ son las alturas del triángulo ABC.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un único punto O, llamado **ortocentro** del triángulo.

Ejemplo 21.1

Construir un triángulo rectángulo y un triángulo obtusángulo y trazar sus alturas.

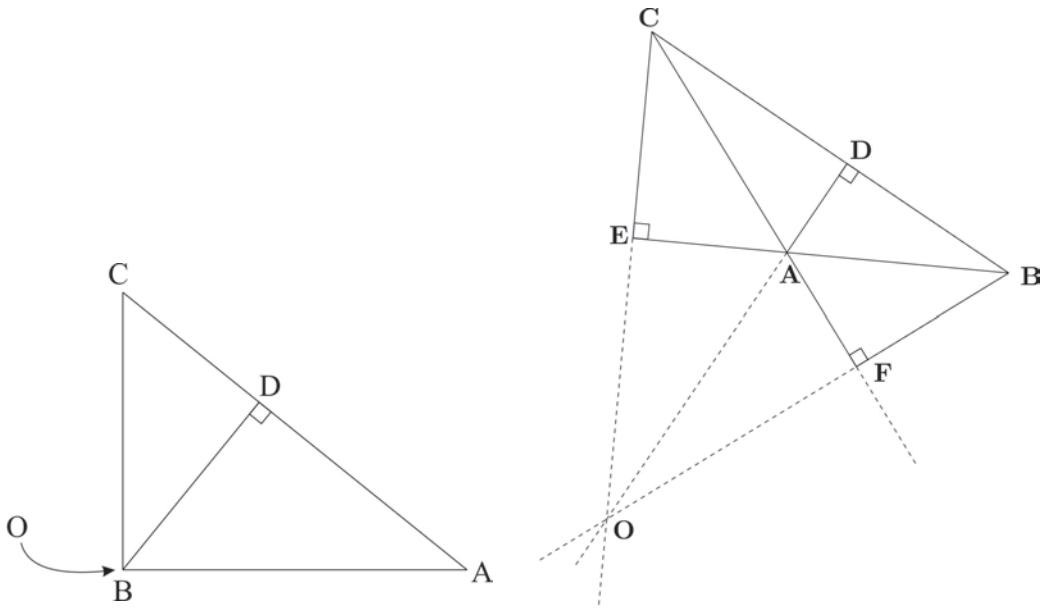
Solución

Para trazar cada una de las alturas de estos triángulos debemos recordar el procedimiento para construir una recta perpendicular a una recta dada que pase por un punto fuera de ella, que se explicó en una lección anterior.

Como las tres alturas se cortan en un único punto, para trazarlas es suficiente construir dos de ellas y la tercera se obtiene trazando el segmento de recta entre el vértice respectivo y el lado opuesto, que pase por el ortocentro.

En la Figura 21.2, trazamos las alturas de un triángulo rectángulo y de un triángulo obtusángulo. Si observamos las Figuras 21.1 y 21.2 vemos que:

- El ortocentro es un punto interior del triángulo, si éste es acutángulo.
- En el triángulo rectángulo dos de las alturas coinciden con los catetos del triángulo y las tres alturas se intersecan en el vértice del ángulo recto.



$\triangle ABC$ rectángulo $\triangle ABC$ obtusángulo

Figura 21.2

- En el triángulo obtusángulo $\triangle ABC$, dos de las alturas se trazan sobre la prolongación de dos de sus lados y el ortocentro está fuera del triángulo.

Ejemplo 21.2

En la Figura 21.3, el $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

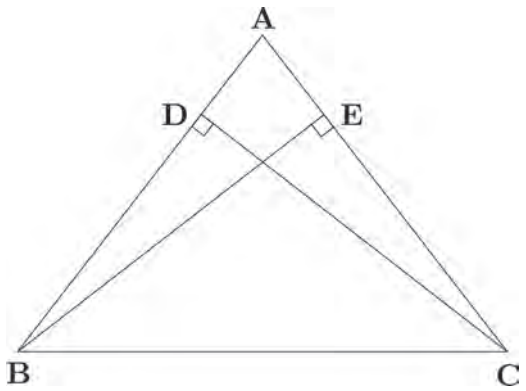


Figura 21.3

Probar que las alturas $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ trazadas desde los vértices de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente, adyacentes a la base del triángulo, son congruentes

Solución

Debemos probar que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.

Como

$\triangle BDC$ y $\triangle CEB$ son rectángulos,

$\angle ABC \cong \angle ACB$ por ser $\triangle ABC$ isósceles y

$\overline{BC}$ es hipotenusa común,

entonces

$\triangle BDC \cong \triangle CEB$, por ser triángulos rectángulos con la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.

Luego, $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Mediatrices

Las **mediatrices** de un triángulo son las mediatrices de sus lados.

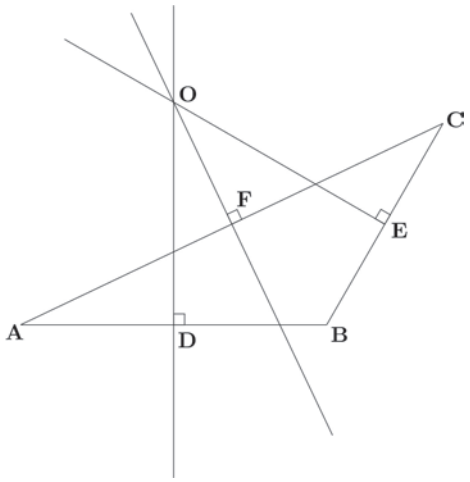


Figura 21.4

Llamemos D, E y F a los puntos medios de los lados del triángulo ABC, como se muestra en la Figura 21.4.

Las rectas DO, EO y FO son las mediatrices del triángulo.

Las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un único punto O, llamado **circuncentro** del triángulo.

Para presentar una propiedad importante del circuncentro vamos a probar el siguiente teorema, utilizando la congruencia de triángulos.

Teorema 21.1

Todo punto de la mediatriz de un segmento de recta equidista de los extremos del segmento.

Prueba

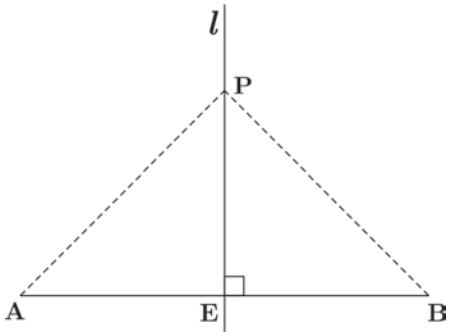


Figura 21.5

Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta, E su punto medio y la recta l su mediatriz.

Si P un punto cualquiera de l,

debemos probar que $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

Como

$\triangle AEP$ y $\triangle BEP$ son triángulos rectángulos, por ser l la mediatriz de $\overline{AB}$,

$\overline{AE} \cong \overline{EB}$, por ser E punto medio de $\overline{AB}$ y

$\overline{EP}$ es lado común de ambos triángulos

entonces

$\triangle AEP \cong \triangle BEP$ por ser triángulos rectángulos con los catetos correspondientes congruentes.

Luego, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Como todo punto de la mediatriz de un segmento de recta equidista de los extremos del segmento, por teorema anterior, y el circuncentro es un punto común a las tres mediatrices de un triángulo, el circuncentro O es un punto que equidista o está a la misma distancia de los tres vértices del triángulo.

Por tanto, O es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo, como se muestra en la Figura 21.6, y se conoce como **circunferencia circunscrita**.

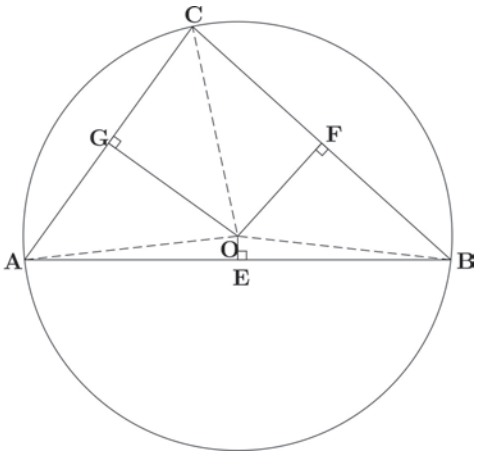


Figura 21.6

En la Figura 21.6,

$\triangle ABC$

OE, OF y OG mediatrices

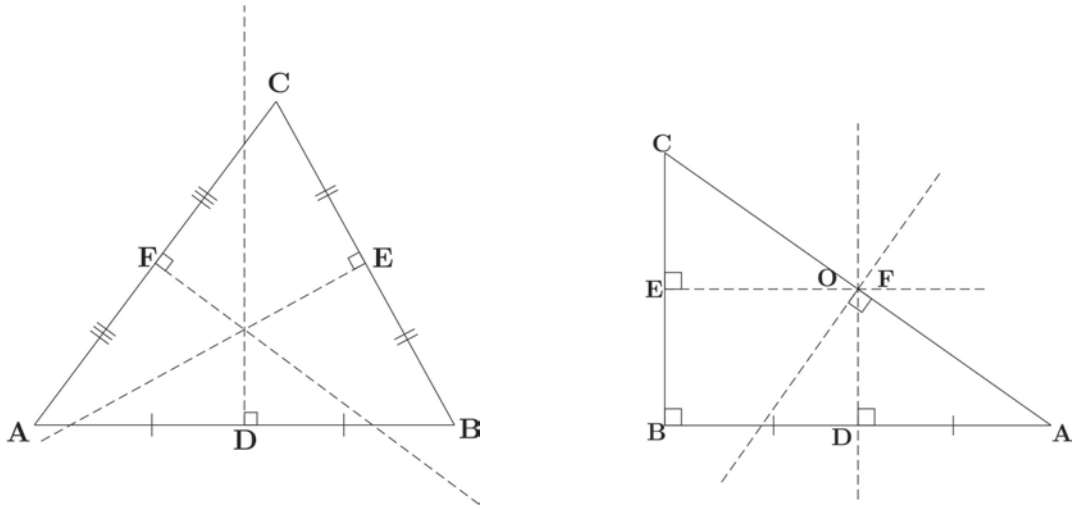
$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}$.

Ejemplo 21.3

Construir un triángulo acutángulo y un triángulo rectángulo y trazar sus mediatrices.

Solución

Trazamos la mediatriz de cada uno de los lados de los triángulos, como se explicó en una lección anterior.



$\triangle ABC$ acutángulo $\triangle ABC$ rectángulo

Figura 21.7

En el triángulo rectángulo de la Figura 21.7 observamos que el circuncentro está sobre la hipotenusa.

Ejemplo 21.4

Consideremos el $\triangle ABC$ de la Figura 21.8.

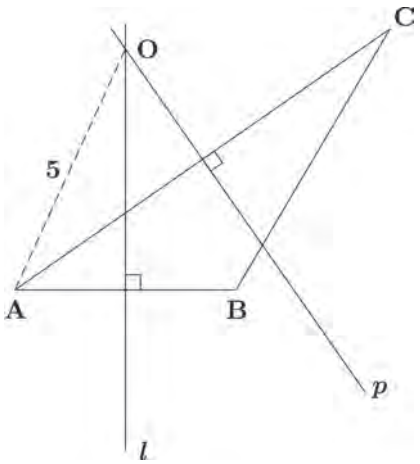


Figura 21.8

Las rectas l y p son las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, que se intersectan en O.

Si $\overline{OA} = 5$, sin usar una regla para medir, ¿qué podemos decir de la medida de $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$?

Solución

Como l es la mediatriz de $\overline{AB}$, entonces todo punto de l y, en particular el punto O, equidista de A y de B. De igual manera, como p es la mediatriz de $\overline{AC}$, entonces todo punto de p y, en particular O, equidista de A y de C. Esto es, el punto O está a la misma distancia de A, B y C y por lo tanto

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}.$$

Luego, como $\overline{OA} = 5$ entonces $\overline{OB} = 5$ y $\overline{OC} = 5$.

Ejercicios propuestos

1. En el $\triangle ABC$ de la Figura 21.9 tenemos que: $\overline{AH} \cong \overline{HC}$, $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, $HN \perp \overline{AC}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{AF} \perp \overline{CB}$ y $DJ \perp \overline{AB}$.

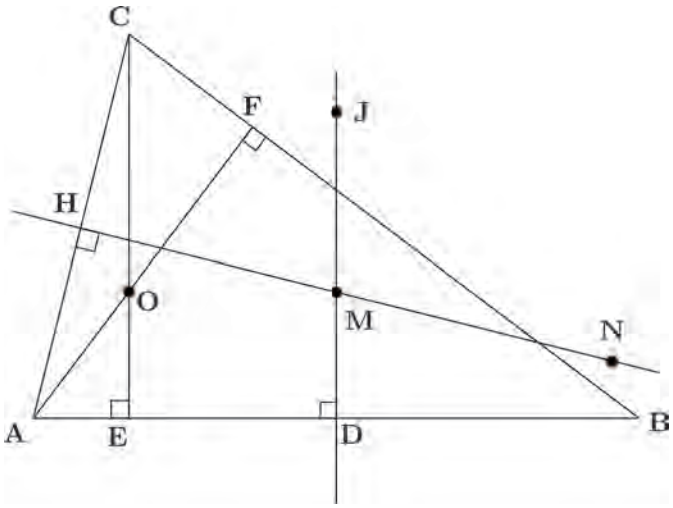


Figura 21.9

Dar el nombre de los siguientes elementos que aparecen en la Figura 21.9: la recta HN, $\overline{AF}$, $\overline{CE}$, punto O, la recta DJ y el punto M.

2. Se quiere construir un centro de salud que preste servicio a los habitantes de tres pueblos de Antioquia ubicados en los puntos A, B y C, como se muestra en la Figura 21.10.

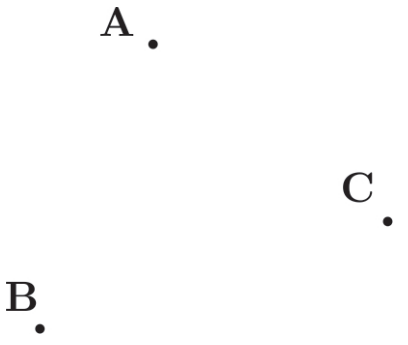


Figura 21.10

Hallar, en el plano determinado por A, B y C, el punto S en el cual se debe construir el centro de salud de tal manera que esté a igual distancia de los tres pueblos.

3. En el $\triangle ABC$ de la Figura 21.11, $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son dos alturas del triángulo que se intersecan en el punto O.

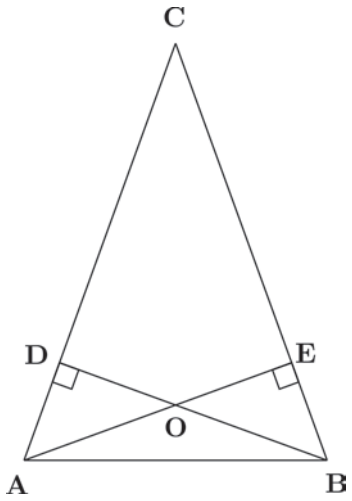


Figura 21.11

Si $\overline{AD} \cong \overline{BE}$,

(a) Probar que $\triangle DOA \cong \triangle EOB$.

(b) Probar que el $\triangle DEC$ es isósceles.

(c) ¿El $\triangle ABC$ es isósceles?

(d) ¿Las alturas $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son congruentes?

Respuestas

1. HN y DJ son mediatrices del $\triangle ABC$ relativas a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$ son dos alturas del $\triangle ABC$, O es ortocentro del $\triangle ABC$ y M es el circuncentro del $\triangle ABC$.

2. Ayuda: utilizar el Teorema 21.1.

3. (a) Ayuda: recordar los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.

   (b) Ayuda: probar que $\triangle CDB \cong \triangle CEA$.

   (c) Ayuda: utilizar la congruencia de triángulos que demostró en (b).

   (d) Ayuda: utilizar la congruencia de triángulos que demostró en (b).

Lección 22

Rectas en el triángulo
Medianas y bisectrices

En esta lección continuaremos el trabajo con las rectas notables en un triángulo. Veremos las medianas y las bisectrices, sus puntos de intersección y algunas de sus propiedades.

Medianas

Una **mediana** de un triángulo es el segmento de recta trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

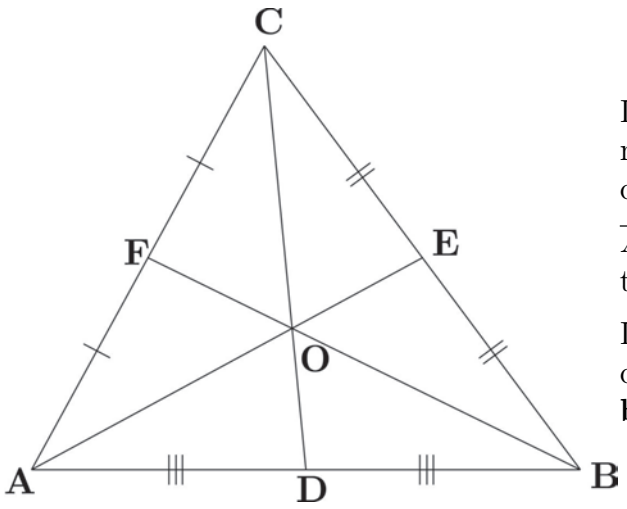


Figura 22.1

Llamemos D, E y F a los puntos medios de los lados del triángulo ABC, como se muestra en la Figura 22.1.

$\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CD}$ son las medianas del triángulo.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un único punto O, llamado **baricentro** del triángulo.

Ejemplo 22.1

Construir un triángulo obtusángulo que tenga un lado de 6 cm, con ángulos adyacentes de 140° y 20° y trazar sus medianas.

Solución

Para construir el triángulo trazamos un segmento de recta, llamémoslo $\overline{AB}$, cuya medida sea 6 cm y en sus extremos, usando regla y transportador, trazamos los ángulos de 140° y 20°. Luego, prolongamos los lados de estos ángulos hasta que se corten en un punto que corresponde al vértice C, como se muestra en la Figura 22.2.

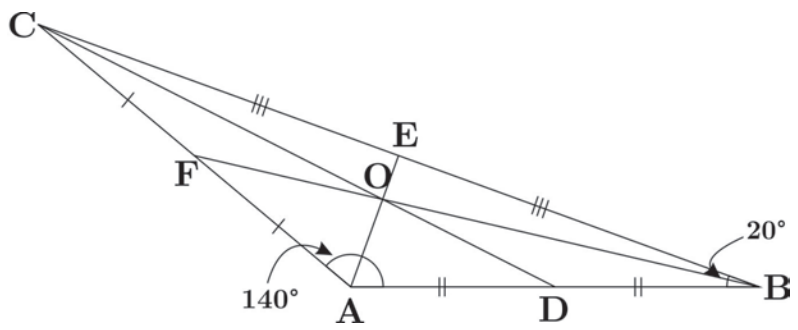


Figura 22.2

Para trazar las medianas, hallamos el punto medio de cada lado, como se explicó en una lección anterior, y luego trazamos los segmentos de recta desde cada vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

Ejemplo 22.2

1. Construir un $\triangle ABC$ isósceles cualquiera y trazar las medianas de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ adyacentes a su base.
2. Si $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ son las medianas trazadas en (a) y G es su punto de intersección, probar que $\triangle BCE \cong \triangle CBD$.
3. ¿Qué podemos afirmar de las medianas $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$?
4. ¿Qué podemos afirmar de $\angle GBC$ y $\angle GCB$?
5. ¿Es el $\triangle GBC$ isósceles?

Solución

1. Para construir un $\triangle ABC$ isósceles procedemos así:

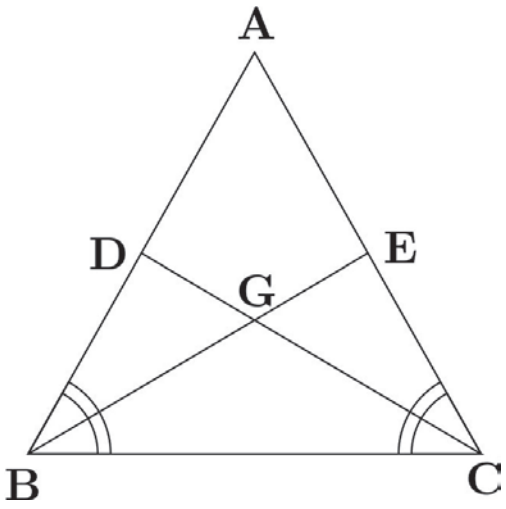


Figura 22.3

Trazamos un segmento $\overline{BC}$ cualquiera.

Con el compás con centro en B y un radio mayor que la mitad de la medida de $\overline{BC}$ trazamos un arco.

Haciendo centro en C y con el mismo radio trazamos otro arco que corte al primero.

El punto de intersección de estos dos arcos es el vértice A.

Unimos A con B y C y obtenemos un $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, como se muestra en la Figura 22.3.

Para trazar las medianas $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ hallamos los puntos medios E y D de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, y luego trazamos los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ que son las medianas pedidas.

2. Como

   $\overline{BC}$ es lado común,

   $\angle B \cong \angle C$ por ser $\triangle ABC$ isósceles y

   $\overline{EC} \cong \overline{DB}$ por ser E y D puntos medios de los lados congruentes $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$,

   entonces

   $\triangle BCE \cong \triangle CBD$ por criterio de congruencia L-A-L.

3. Como $\triangle BCE \cong \triangle CBD$ y elementos correspondientes de triángulos congruentes son congruentes, entonces $\overline{BE} \cong \overline{CD}$. Esto es, las medianas trazadas desde los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.

4. Por la misma razón dada en 3., $\angle GBC \cong \angle GCB$.

5. Sí, porque tiene dos ángulos congruentes, $\angle GBC$ y $\angle GCB$, y en un triángulo los lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes.

Bisectrices

Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos.

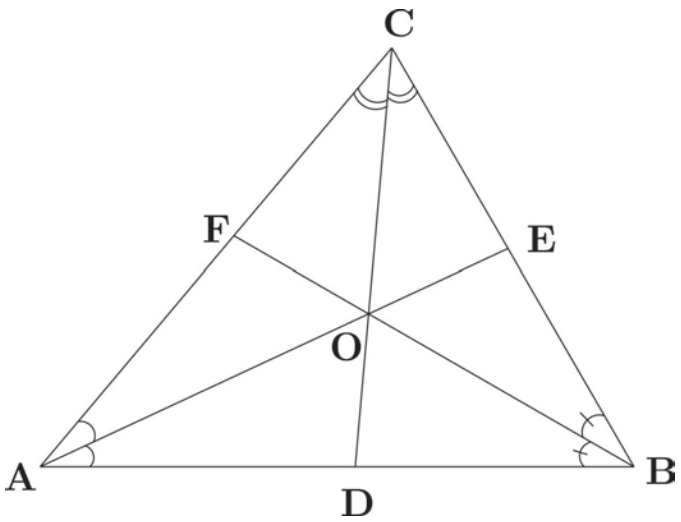


Figura 22.4

En la Figura 22.4,
$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ y $\overrightarrow{CD}$ son las bisectrices del $\triangle ABC$.

Las tres bisectrices de un triángulo se intersectan en un único punto O, llamado **incentro** del triángulo.

En el siguiente teorema, utilizando la congruencia de triángulos, probaremos que los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan o están a igual distancia de los lados del ángulo. Con este resultado podemos enunciar una propiedad importante del incentro.

Teorema 22.1

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

Prueba

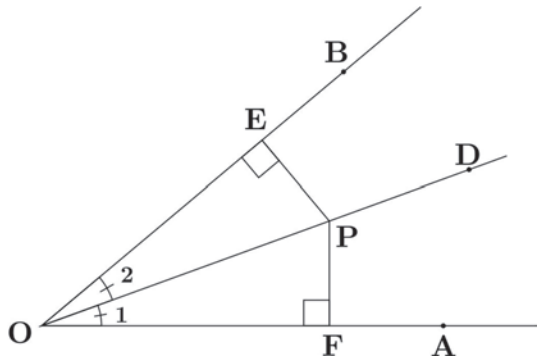


Figura 22.5

Sea $\angle AOB$ un ángulo y $\overrightarrow{OD}$ su bisectriz.

Si P es cualquier punto de $\overrightarrow{OD}$, debemos probar que P equidista, es decir, está a la misma distancia de los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ del $\angle AOB$.

Sean $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ los segmentos perpendiculares desde P a los lados del ángulo, como se muestra en la Figura 22.5. Así, $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ son las distancias de P a los lados $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OA}$, respectivamente. Debemos probar que $\overline{PE} \cong \overline{PF}$.

Como

$\triangle OEP$ y $\triangle OFP$ son rectángulos,

$\angle 1 \cong \angle 2$ por ser $\overrightarrow{OD}$ bisectriz de $\angle AOB$ y

$\overline{OP}$ es hipotenusa común,

entonces

$\triangle OEP \cong \triangle OFP$, por tener la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.

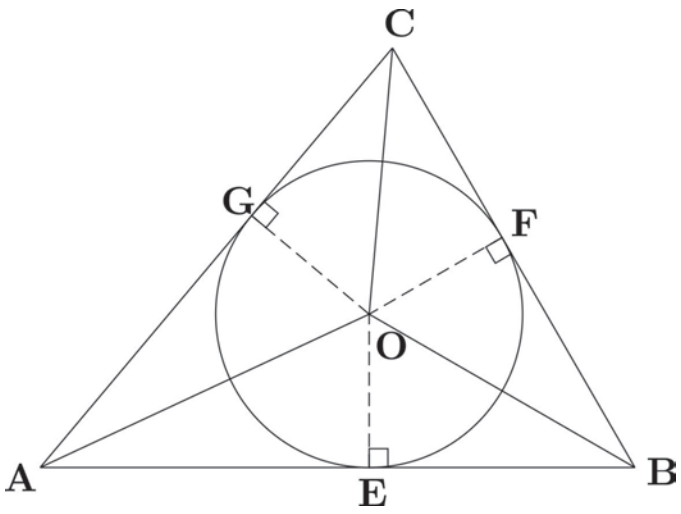
Luego, sus elementos correspondientes son congruentes y así

$$\overline{PE} \cong \overline{PF}.$$

Esto es, todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

Como los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo y como el incentro O es un punto común a las tres bisectrices entonces O es un punto que equidista de los tres lados del triángulo.

Por tanto, O es el centro de la circunferencia que " toca" los tres lados del triángulo, como se muestra en la Figura 22.6, y se conoce como **circunferencia inscrita**.



En la Figura 22.6,
$\triangle ABC$
$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$ y $\overrightarrow{CO}$ bisectrices
$\overline{OE} \cong \overline{OF} \cong \overline{OG}$.

Figura 22.6

Es importante tener en cuenta que, en general, la altura, la mediana, la mediatriz y la bisectriz en un triángulo no coinciden, como vemos en la Figura 22.7.

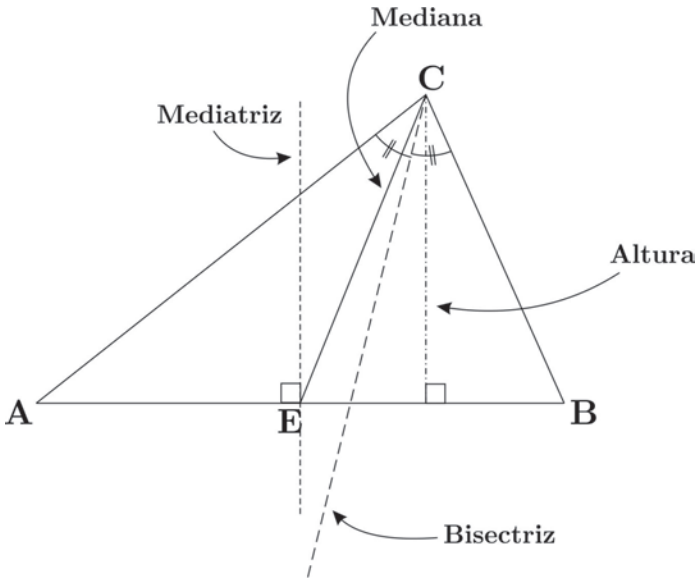


Figura 22.7

En algunos casos especiales estas rectas pueden coincidir como lo probaremos en el siguiente teorema.

Teorema 22.2

En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo del vértice es a la vez altura, mediana y mediatriz de la base.

Prueba

Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y sea $\overrightarrow{AD}$ la bisectriz del $\angle BAC$.

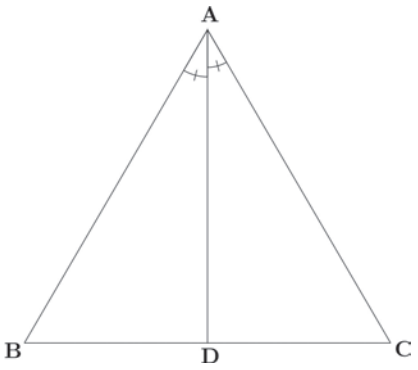


Figura 22.8

Debemos probar que $\overrightarrow{AD}$ es altura, mediana y mediatriz de la base.

Como

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ porque $\triangle ABC$ es isósceles,

$\angle BAD \cong \angle CAD$ porque $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ y

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ porque es el lado común de $\triangle ADB$ y $\triangle ADC$,

entonces

por criterio de congruencia L-A-L, $\triangle ADB \cong \triangle ADC$.

Por tanto, $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ y $\angle ADB \cong \angle ADC$, por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Como $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ entonces D es el punto medio de $\overline{BC}$. Por tanto, $\overrightarrow{AD}$ también es mediana.

Como $\angle ADB$ y $\angle ADC$ son ángulos suplementarios y congruentes,

$$\angle ADB + \angle ADC = 180°$$

y por tanto,

$$\angle ADB = \angle ADC = 90°.$$

Luego, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es altura.

Como $\overrightarrow{AD}$ es perpendicular en el punto medio de $\overline{BC}$ entonces $\overrightarrow{AD}$ es mediatriz de la base $\overline{BC}$.

Ejemplo 22.3

Probar que para todo ángulo de un triángulo equilátero la bisectriz del ángulo es a la vez altura, mediana y mediatriz del lado opuesto.

Solución

Como todo triángulo equilátero es isósceles, para cualquier ángulo del triángulo, si consideramos el lado opuesto como la base del triángulo, su bisectriz es a la vez altura, mediana y mediatriz de la base, como se probó en el Teorema 22.2.

Ejercicios propuestos

1. En el $\triangle ABC$ de la Figura 22.9, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BD}$ son bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ respectivamente, $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$ y E, D y H son puntos colineales. Probar que $\triangle AED$ y $\triangle BHD$ son isóceles.

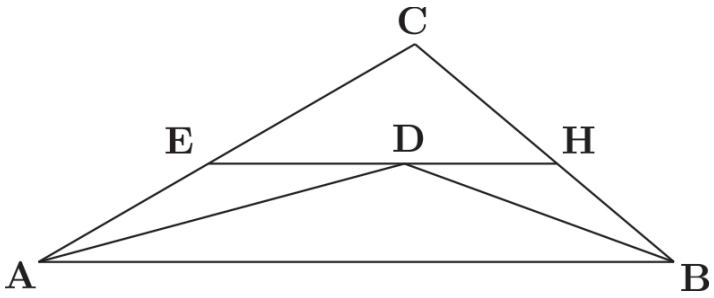


Figura 22.9

2. En el $\triangle ABC$ de la Figura 22.10, la mediana $\overline{BM}$, trazada desde el vértice B, se prolonga hasta el punto E de tal manera que $\overline{ME} \cong \overline{MB}$. Probar que $\triangle CEM \cong \triangle ABM$.

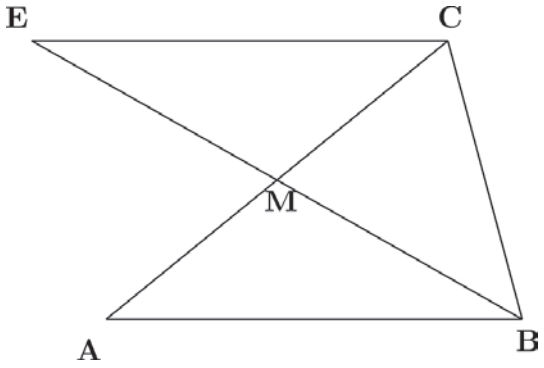


Figura 22.10

3. En el $\triangle ABC$ de la Figura 22.11, $\overrightarrow{CE}$ es la bisectriz del $\angle C$ y $\angle 1$ y $\angle 2$ son los ángulos que $\overrightarrow{CE}$ forma con el lado $\overline{AB}$. Probar que $\angle 1 - \angle 2 = \angle B - \angle A$.

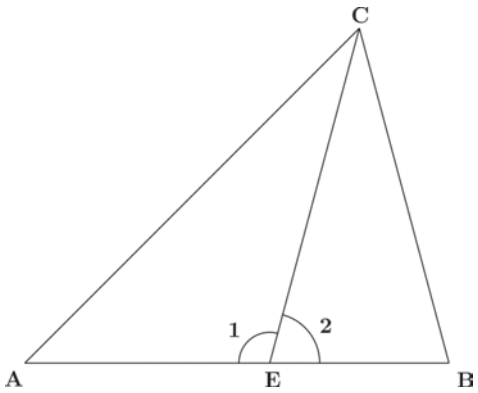


Figura 22.11

4. En la Figura 22.12, $\overline{PS} \cong \overline{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ es la bisectriz del $\angle SPQ$ y los puntos P, R y T son colineales. Probar que $\overline{SR} \cong \overline{RQ}$ y que $\overrightarrow{RT}$ es la bisectriz del $\angle SRQ$.

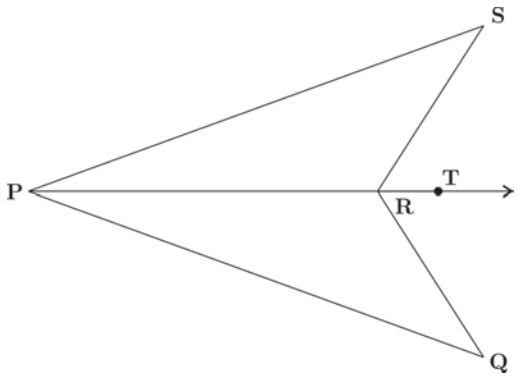


Figura 22.12

Respuestas

1. Ayuda: recordar el concepto de bisectriz y las propiedades de los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.
2. Ayuda: recordar el concepto de mediana y los criterios de congruencia de triángulos.
3. Ayuda: recordar el concepto de bisectriz y las propiedades de los ángulos interiores o de los ángulos exteriores de un triángulo.
4. Ayuda: recordar el concepto de bisectriz y probar que $\triangle PSR \cong \triangle PQR$.

Lección 23

Segmentos congruentes entre paralelas
Proporcionalidad de segmentos

En esta lección probaremos dos resultados que relacionan la congruencia de segmentos y el paralelismo de rectas y con base en ellos dividiremos un segmento de recta en segmentos congruentes. Veremos además el concepto de proporcionalidad de segmentos.

Teorema 23.1

Dos segmentos de recta paralelos entre sí, comprendidos entre rectas paralelas, son congruentes.

Prueba

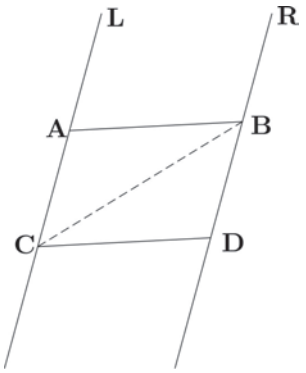


Figura 23.1

Consideremos las rectas $L \parallel R$ y los segmentos de recta $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Debemos demostrar que

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Trazamos $\overline{CB}$.

Como

$\angle ABC \cong \angle DCB$ por ser alternos internos entre paralelas,

$\overline{CB} \cong \overline{CB}$ por ser lado común y

$\angle ACB \cong \angle DBC$ por ser alternos internos entre paralelas,

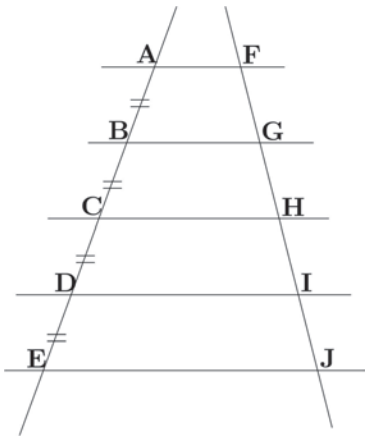
entonces

$\triangle ABC \cong \triangle DCB$ por el criterio de congruencia A-L-A.

Luego, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Teorema 23.2

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre una secante, entonces también lo hacen sobre cualquier otra secante.



Consideremos las rectas

$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EJ \cdots$

y las rectas AE y FJ secantes.

Si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \cdots$

debemos probar que

$\overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HI} \cong \overline{IJ} \cong \cdots$

Figura 23.2

Prueba

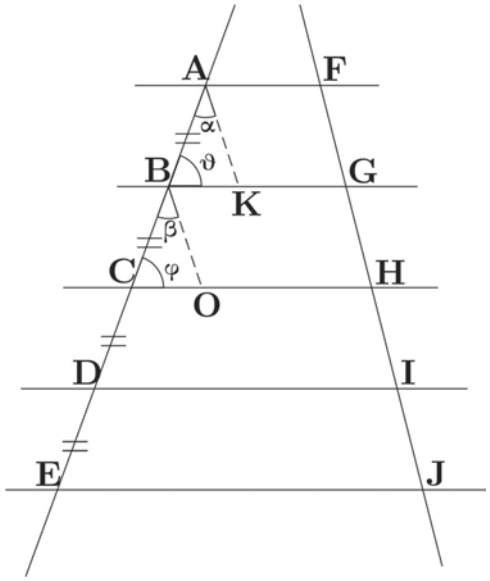


Figura 23.3

Si las rectas secantes AE y FJ son paralelas, el resultado es consecuencia del teorema anterior.

Supongamos que AE y FJ no son paralelas; veamos que también en este caso se cumple el resultado.

Tracemos $AK \parallel FG$, $BO \parallel GH$ y nombremos los ángulos como se muestra en la Figura 23.3

Como

$\angle\alpha \cong \angle\beta$ por ser correspondientes entre paralelas, ya que $\overline{AK}$ y $\overline{BO}$ son ambas paralelas a $\overline{FJ}$, entonces ellas son paralelas entre sí,

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ según el enunciado y

$\angle\vartheta \cong \angle\varphi$ por ser correspondientes entre paralelas,

entonces

$\triangle ABK \cong \triangle BCO$ por el criterio de congruencia A-L-A, y así

$\overline{AK} \cong \overline{BO}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Como $\overline{AK} \cong \overline{FG}$ y $\overline{BO} \cong \overline{GH}$ por ser segmentos paralelos entre paralelas, entonces

$\overline{FG} \cong \overline{GH}$.

En forma similar podemos demostrar que $\overline{GH} \cong \overline{HI} \cong \overline{IJ} \cong \ldots$

El teorema anterior nos da las herramientas para la siguiente construcción.

Construcción 23.1

¿Cómo dividir un segmento de recta en segmentos congruentes?

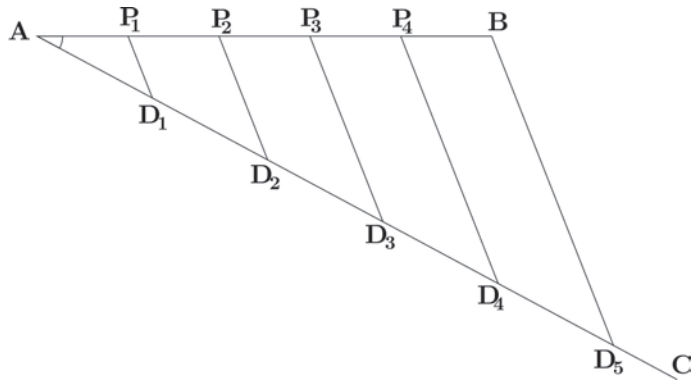


Figura 23.4

Sea $\overline{AB}$ el segmento dado.

Para ilustrar la construcción, vamos a dividir el segmento $\overline{AB}$ en cinco segmentos congruentes entre sí.

A partir del extremo A y con un ángulo cualquiera, trazamos la recta AC.

Desde A y sobre AC, construimos cinco segmentos de medida arbitraria, pero que sean congruentes entre sí: $\overline{AD_1} \cong \overline{D_1D_2} \cong \overline{D_2D_3} \cong \overline{D_3D_4} \cong \overline{D_4D_5}$.

Trazamos el segmento $\overline{BD_5}$.

Por D_1 , D_2 , D_3 y D_4 trazamos rectas paralelas a $\overline{BD_5}$ que cortan a $\overline{AB}$ en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 respectivamente, como ya se explicó.

Entonces, por el teorema anterior, $\overline{AP_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \overline{P_2P_3} \cong \overline{P_3P_4} \cong \overline{P_4B}$.

Proporcionalidad de segmentos de recta

Recordemos los conceptos de razón y proporción.

Una **razón** es el cociente de dos números reales y una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ es una razón y $\frac{3}{7} = \frac{18}{42}$ es una proporción.

Una proporción como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se conoce como una proporción simple, porque tiene sólo cuatro números, pero podemos tener proporciones con igualdad de varias razones como

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ...$$

Algunas propiedades de las proporciones, muchas de las cuales utilizaremos en esta lección, son:

Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

donde a, b, c y d son números reales diferentes de cero, entonces

1. $ad = bc$
2. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
3. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
4. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Dos segmentos de recta son **proporcionales** a otros dos segmentos, si la razón entre las medidas de los dos primeros es igual a la razón entre las medidas de los otros dos.

Por ejemplo, si $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{RQ}}$, decimos que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{RQ}$. También acostumbramos decir que $\overline{AB}$ es a $\overline{CD}$ como $\overline{MN}$ es a $\overline{RQ}$.

Ejemplo 23.1

Si $\frac{x}{40} = \frac{y}{50} = \frac{30}{20}$, ¿cuáles son los valores de x y y?

Solución

Como $\frac{x}{40} = \frac{30}{20}$ entonces $x = \frac{30}{20} \cdot 40 = 60$

y como $\dfrac{y}{50} = \dfrac{30}{20}$ entonces $y = \dfrac{30}{20} \cdot 50 = 75$.

Ejercicios propuestos

1. Dividir un segmento de recta $\overline{AB}$ en el número de segmentos congruentes indicado en cada literal.
   (a) Tres.
   (b) Cinco.
   (c) Siete.
2. Hallar los valores de x y y si
$$\frac{x}{20} = \frac{2}{y} = \frac{16}{48}.$$
3. Escribir en forma de proporción las siguientes expresiones:
   (a) Dos es a tres como la medida del segmento $\overline{AB}$ es a la medida del segmento $\overline{BC}$.
   (b) $(3 - x)$ es a $(2 + y)$ como 5 es a 2.
   (c) En el triángulo $\triangle ABC$ de la Figura 23.5, la bisectriz $\overrightarrow{AD}$ del ángulo $\angle A$ divide el lado $\overline{BC}$ en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a los dos segmentos.

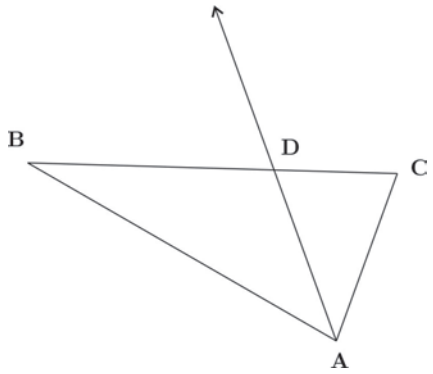
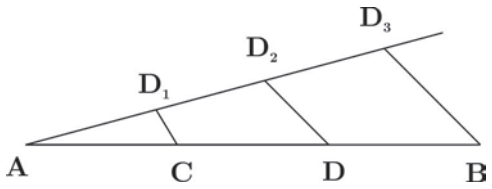


Figura 23.5

Respuestas

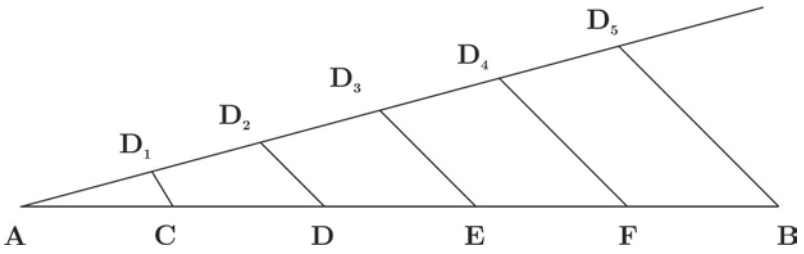
1. (a) En la Figura 23.6 se muestra un segmento $\overline{AB}$ dividido en tres segmentos congruentes.



$\overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DB}$

Figura 23.6

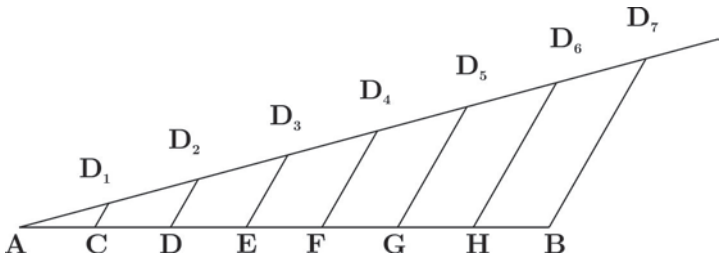
(b) En la Figura 23.7 se muestra un segmento $\overline{AB}$ dividido en cinco segmentos congruentes.



$\overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FB}$

Figura 23.7

(c) En la Figura 23.8 se muestra un segmento $\overline{AB}$ dividido en siete segmentos congruentes.



$\overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HB}$

Figura 23.8

2. $x = \dfrac{20}{3}$ y $y = 6$.

3. (a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

   (b) $\dfrac{3-x}{2+y} = \dfrac{5}{2}$.

   (c) $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}}$.

Lección 24

Teorema de Tales

En esta lección presentaremos dos teoremas, uno de ellos conocido como el Teorema de Tales, que relacionan el paralelismo entre rectas y la proporcionalidad de segmentos de recta, ambos muy importantes para el trabajo sobre semejanza de triángulos, que desarrollaremos más adelante.

Teorema 24.1 ***Teorema de Tales***

Si tres o más rectas paralelas entre sí cortan dos rectas secantes diferentes, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los correspondientes segmentos determinados en la otra.

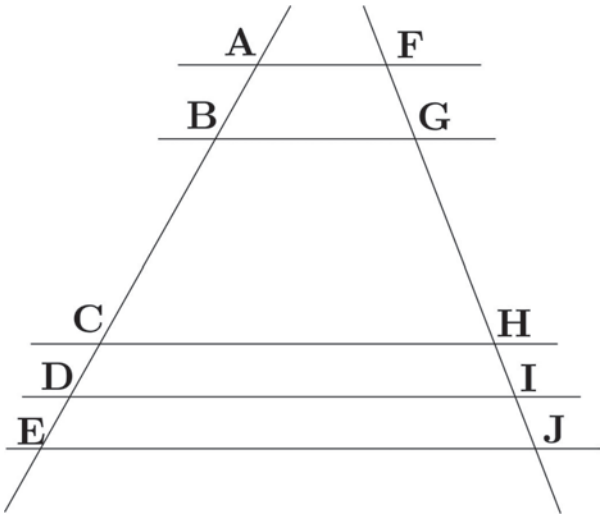


Figura 24.1

Si $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EJ \cdots$

y AE y FJ son rectas secantes, entonces

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{HI}} = \cdots$$

Las proporciones se pueden establecer entre segmentos determinados por cualquier par de rectas paralelas. Por ejemplo,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{IJ}}.$$

Prueba

Consideremos una unidad de medida u tal que $\overline{AB} = mu$ y $\overline{BC} = nu$, con m y n números naturales.

Coloquemos dicha unidad m veces sobre el segmento $\overline{AB}$ y n veces sobre el segmento $\overline{BC}$ y por cada uno de los puntos de unión de la unidades u, tracemos rectas paralelas a $\overline{AF}$, como se muestra en la Figura 24.2.

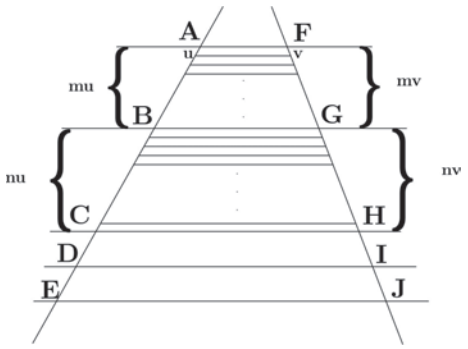


Figura 24.2

Entonces, $\overline{FG}$ queda dividido en m segmentos congruentes, cada uno de ellos de medida, digamos v y $\overline{GH}$ queda dividido en n segmentos de la misma medida v. Así que $\overline{FG} = mv$ y $\overline{GH} = nv$.

Luego,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}} = \frac{mv}{nv} = \frac{m}{n}$$

Por tanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GH}}.$$

Y por propiedad de las proporciones,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{GH}}.$$

En forma similar probamos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{HI}} \cdots .$$

Ejemplo 24.1

Tres lotes de terreno A, B y C se extienden desde la Calle Principal hasta la Avenida Central, como se muestra en la Figura 24.3.

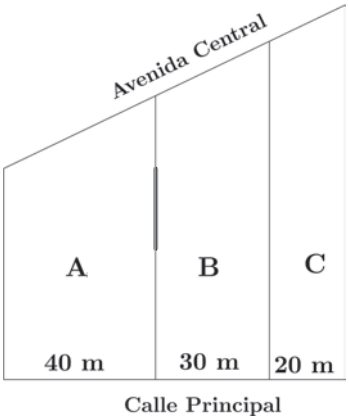


Figura 24.3

Los linderos laterales son segmentos perpendiculares a la Calle Principal.

Si el frente total de los terrenos en la Avenida Central mide 120 m, determinar la medida del frente de cada lote en la Avenida Central.

Solución

Según el Teorema 24.1 si tres o más rectas paralelas determinan segmentos sobre dos rectas secantes, los segmentos determinados sobre una de ellas, son proporcionales a los segmentos determinados sobre la otra recta secante.

Si llamamos x, y y z a las medidas de los frentes de los lotes A, B y C respectivamente, sobre la Avenida Central, tenemos

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = \frac{120}{90} = \frac{4}{3}.$$

Como $\dfrac{x}{40} = \dfrac{4}{3}$, entonces $x = \dfrac{4}{3} \cdot 40 = \dfrac{160}{3}$.

Como $\dfrac{y}{30} = \dfrac{4}{3}$, entonces $y = \dfrac{4}{3} \cdot 30 = 40$.

Como $\dfrac{z}{20} = \dfrac{4}{3}$, entonces $z = \dfrac{4}{3} \cdot 20 = \dfrac{80}{3}$.

Luego, los frentes de los lotes A, B y C miden $\dfrac{160}{3}\,m$, $40\,m$ y $\dfrac{80}{3}\,m$ respectivamente.

Teorema 24.2 ***Teorema fundamental de la proporcionalidad***

Si una recta paralela a un lado de un triángulo, corta a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a estos lados.

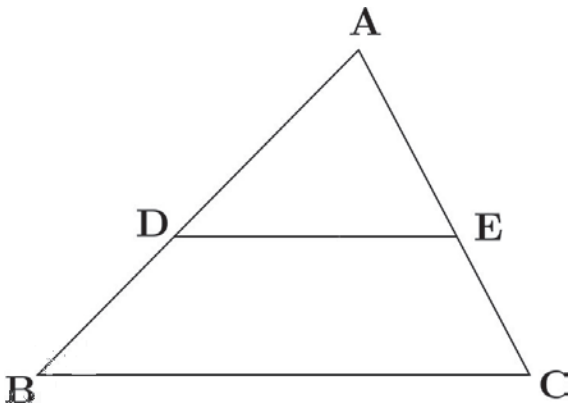


Figura 24.4

En el $\triangle ABC$ si D y E son puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

o también

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

Prueba

Por el punto A tracemos una recta RS tal que $RS \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ como se muestra en la Figura 24.5.

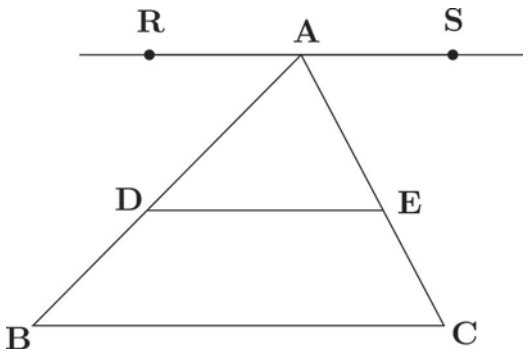


Figura 24.5

Por el Teorema 24.1,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EC}}.$$

Y por propiedad de las proporciones,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

El recíproco del teorema anterior también se cumple, es decir, si una recta corta a dos lados de un triángulo y determina segmentos proporcionales a esos dos lados, entonces la recta es paralela al tercer lado.

Ejemplo 24.2

En el $\triangle RPQ$ de la Figura 24.6, $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$.

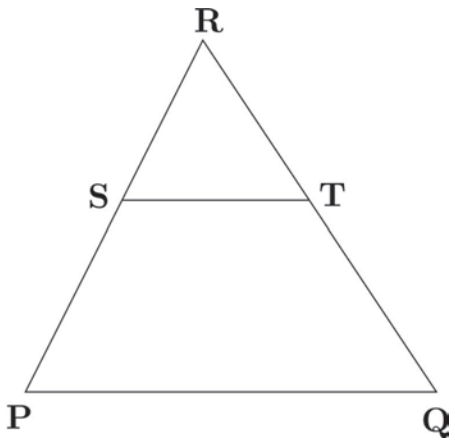


Figura 24.6

Completar los siguientes enunciados:

a) $\frac{\overline{RP}}{\overline{RS}} = \frac{?}{?}$, b) $\frac{\overline{RS}}{\overline{SP}} = \frac{?}{?}$,

c) $\frac{?}{?} = \frac{\overline{SP}}{\overline{RP}}$, d) $\frac{\overline{RT}}{\overline{RQ}} = \frac{?}{?}$,

e) $\frac{\overline{RS}}{\overline{RT}} = \frac{?}{?}$, f) $\frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}} = \frac{?}{?}$.

Solución

a) $\frac{\overline{RP}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{RT}}$ ó $\frac{\overline{RP}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{ST}}$.

b) $\frac{\overline{RS}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{TQ}}$. c) $\frac{\overline{TQ}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{RP}}$.

d) $\frac{\overline{RT}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{RP}}$ ó $\frac{\overline{RT}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{PQ}}$.

e) $\dfrac{\overline{RS}}{\overline{RT}} = \dfrac{\overline{SP}}{\overline{TQ}}$ ó $\dfrac{\overline{RS}}{\overline{RT}} = \dfrac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}$.

f) $\dfrac{\overline{RQ}}{\overline{RP}} = \dfrac{\overline{RT}}{\overline{RS}}$ ó $\dfrac{\overline{RQ}}{\overline{RP}} = \dfrac{\overline{TQ}}{\overline{SP}}$.

Ejemplo 24.3

En la Figura 24.7, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Vamos a hallar las medidas de algunos segmentos del triángulo, dadas las medidas de otros.

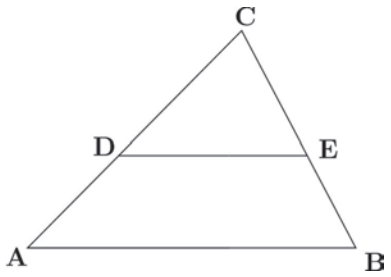


Figura 24.7

1. Si $\overline{AC} = 12$, $\overline{CD} = 4$, $\overline{CE} = 8$, hallar $\overline{BC}$.
2. Si $\overline{AD} = 6$, $\overline{BE} = 15$, $\overline{CD} = 4$, hallar $\overline{CE}$.
3. Si $\overline{BC} = 22$, $\overline{EB} = 6$, $\overline{CD} = 8$, hallar $\overline{AC}$.

Solución

Como $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ entonces

1. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$, luego $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \times \overline{CE} = \dfrac{12}{4} \times 8 = 24$.
2. $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$, entonces $\overline{CE} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \times \overline{BE} = \dfrac{4}{6} \times 15 = \dfrac{60}{6} = 10$.
3. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$ y como $\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{EB} = 22 - 6 = 16$,

   entonces $\overline{AC} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \times \overline{CD} = \dfrac{22}{16} \times 8 = 11$.

Ejemplo 24.4

En la Figura 24.8, si los segmentos tienen las medidas indicadas, encontrar los valores de x para los cuales $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

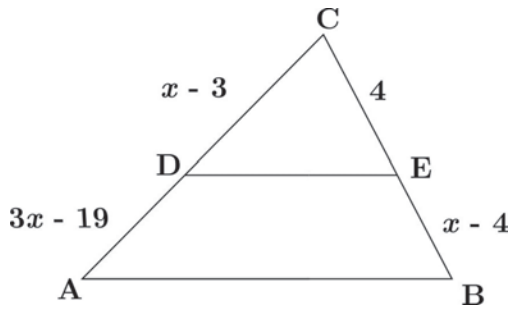


Figura 24.8

Solución

Para que $\overline{DE}$ sea paralela a $\overline{AB}$ se debe cumplir que los segmentos determinados por los puntos D y E sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, sean proporcionales, es decir,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}.$$

Sustituyendo los segmentos por sus medidas, tenemos

$$\frac{x-3}{3x-19} = \frac{4}{x-4}.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}(x-3)(x-4) &= 4(3x-19)\\ x^2-7x+12 &= 12x-76\\ x^2-19x+88 &= 0\\ (x-8)(x-11) &= 0.\end{aligned}$$

Luego, $x = 8$ ó $x = 11$, lo que quiere decir que hay dos soluciones posibles.

Se deja como ejercicio para el lector comprobar que estos valores satisfacen la proporcionalidad.

Ejemplo 24.5

En la Figura 24.9,

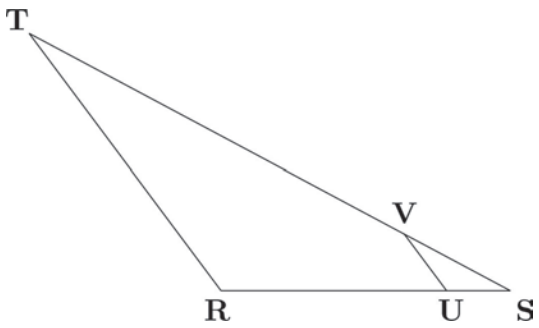


Figura 24.9

$\overline{TS} = 18$, $\overline{VS} = 4$,
$\overline{RS} = 9$ y $\overline{RU} = 7$.
¿Será $\overline{UV} \parallel \overline{RT}$?

Solución

Para que $\overline{UV}$ sea paralela a $\overline{RT}$ es necesario que los segmentos determinados por U y V sobre los lados $\overline{RS}$ y $\overline{TS}$ respectivamente sean proporcionales, es decir, si $\frac{\overline{RS}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{US}}{\overline{VS}}$.

Como $\overline{US} = \overline{RS} - \overline{RU} = 9 - 7 = 2$, reemplazando éste y los valores dados tenemos $\frac{9}{18} = \frac{2}{4}$ y simplificando $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Luego, los segmentos son proporcionales y por tanto $\overline{UV} \parallel \overline{RT}$.

Ejercicios propuestos

1. Probar que el segmento de recta que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su medida es igual a la mitad de la medida de dicho lado.

2. Si en la Figura 24.10, D y E son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, y $\overline{AC} = 8$, hallar la medida de $\overline{DE}$.

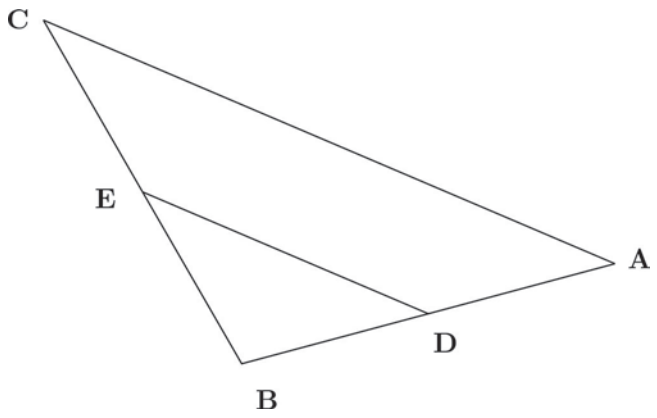


Figura 24.10

3. Con los datos suministrados en la Figura 24.11, calcular la medida de los segmentos $\overline{DA}$, $\overline{CE}$ y $\overline{EB}$, suponiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

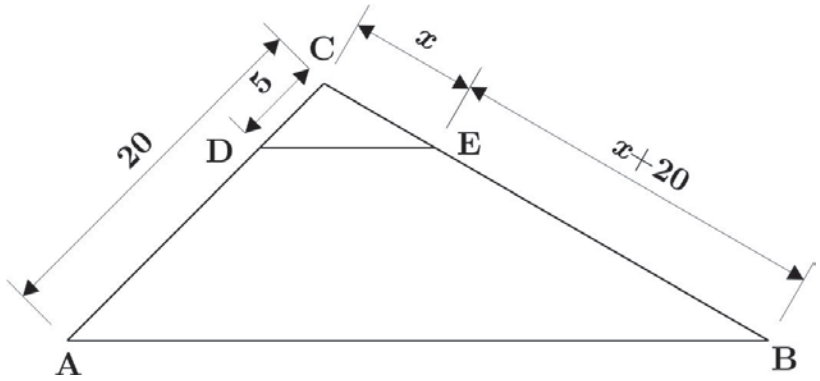


Figura 24.11

Respuestas

1. Ayuda: trazar por uno de los extremos del segmento que une los puntos medios, una recta paralela al lado que contiene el otro extremo de dicho segmento y usar el recíproco del Teorema 24.2 y la congruencia de triángulos.

2. 4.

3. $\overline{DA} = 15$, $\overline{CE} = 10$ y $\overline{EB} = 30$.

Lección 25

Semejanza de triángulos

En esta lección veremos el concepto de semejanza de triángulos, las condiciones que se deben cumplir para que dos triángulos sean semejantes, el primer criterio de semejanza de triángulos y algunos criterios de semejanza de triángulos rectángulos.

En general, dos figuras geométricas son semejantes si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo, dos circunferencias cualesquiera son semejantes, lo mismo ocurre con dos cuadrados y con dos triángulos equiláteros. Este hecho puede expresarse diciendo que dos figuras son semejantes si una de ellas es un modelo a escala de la otra.

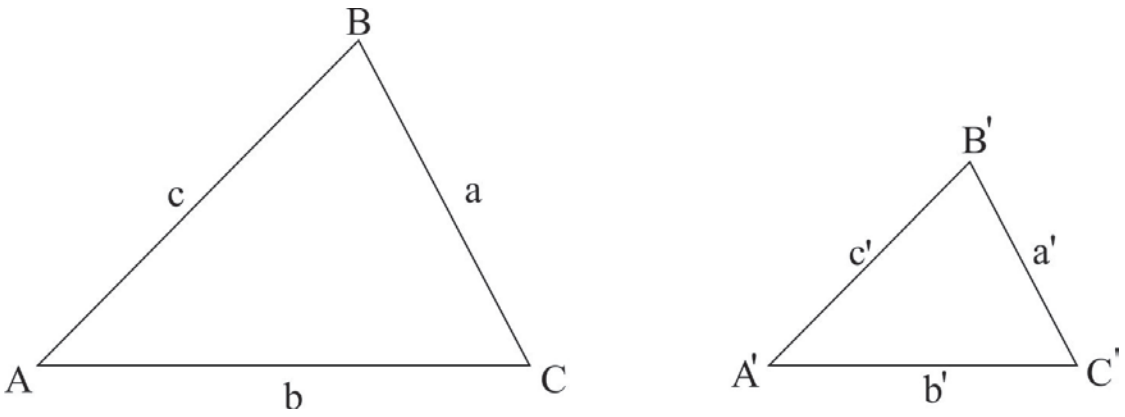


Figura 25.1

Consideremos los triángulos ABC y $A'B'C'$ en los cuales designamos la medida del lado opuesto a $\angle A$ por a, la del lado opuesto al $\angle B$ por b, y similarmente para los otros lados como aparecen señalados en la Figura 25.1.

Decimos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son **semejantes** si $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ y los lados son proporcionales así:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

En este caso decimos que los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son **correspondientes** a los ángulos $\angle A'$, $\angle B'$ y $\angle C'$, respectivamente, y que los lados a, b y c son **correspondientes** a los lados a', b' y c' respectivamente. Si el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle A'B'C'$ denotamos esto por

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Entonces, para que dos triángulos sean semejantes se requieren dos condiciones:

1. Que los ángulos correspondientes sean congruentes.
2. Que los lados correspondientes sean proporcionales.

Notas 25.1

- Dos triángulos semejantes tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.
- Dos triángulos congruentes son semejantes.
- Observemos que aunque no es obligatorio escribir los ángulos correspondientes en el mismo orden, por claridad siempre debemos tratar de hacerlo.

Existen unos criterios, llamados criterios de semejanza de triángulos, que con menos información, nos garantizan la semejanza entre dos triángulos. Veamos el primero de ellos.

Primer criterio de semejanza de triángulos

Criterio **ángulo, ángulo, ángulo** denotado **A-A-A**

Si en dos triángulos los ángulos de uno son respectivamente congruentes con los ángulos del otro, los dos triángulos son semejantes.

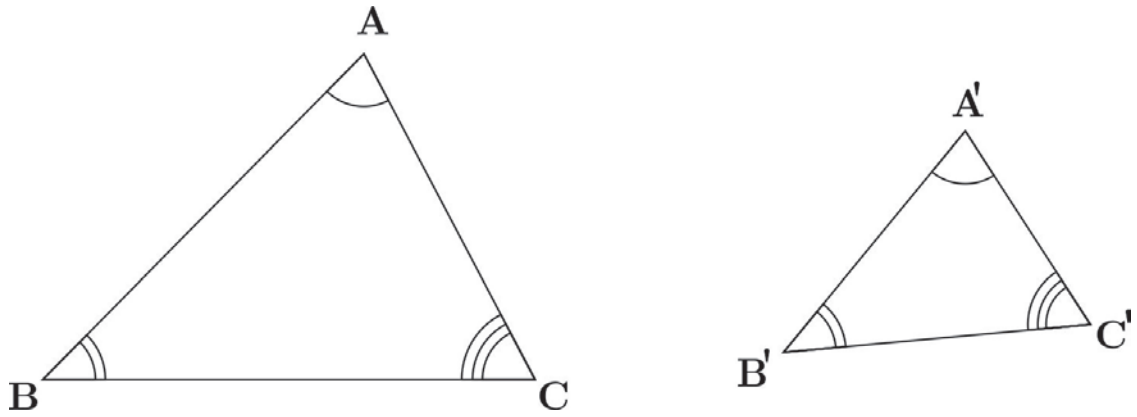


Figura 25.2

Esto es, si $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$, entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Nota 25.1

Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, si se conocen las medidas de dos de los ángulos queda determinada la medida del tercer ángulo y por tanto, podemos expresar el criterio **A-A-A** en una forma más sencilla como **criterio A-A**.

Ejemplo 25.1

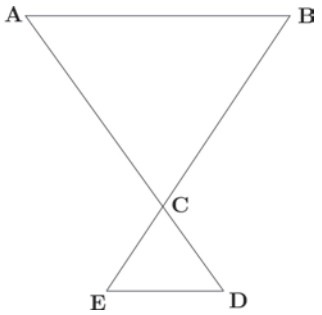


Figura 25.3

En la Figura 25.3, $AB \parallel DE$.

1. Demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.
2. Si $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$ y $\overline{CD} = 3$, hallar $\overline{ED}$.

Solución

1. Como

   $\angle ACB \cong \angle DCE$ por ser opuestos por el vértice,

   $\angle BAC \cong \angle CDE$ por ser alternos internos entre paralelas,

   entonces

   $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ por el criterio de semejanza A-A.

2. Como los dos triángulos son semejantes, podemos establecer relaciones de proporcionalidad entre lados correspondientes así

   $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}}.$$

   Entonces, $\overline{ED} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \overline{CD} = \dfrac{8}{6} \times 3 = 4.$

   Luego, $\overline{ED} = 4$.

Nota 25.2

Como todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo congruente, el ángulo recto, entonces:

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando un ángulo agudo en uno de ellos es congruente con un ángulo agudo en el otro.

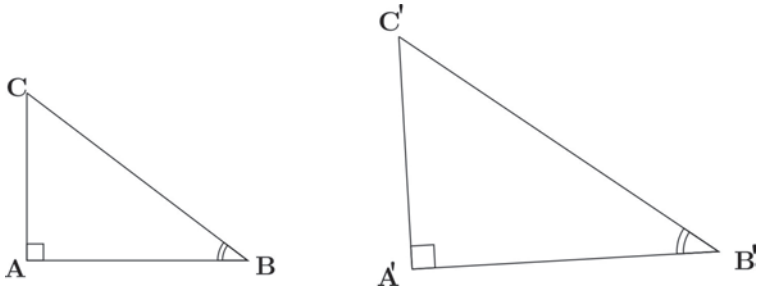


Figura 25.4

Si $\angle B \cong \angle B'$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Ejemplo 25.2

En la Figura 25.5, $\angle A$ es recto y $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

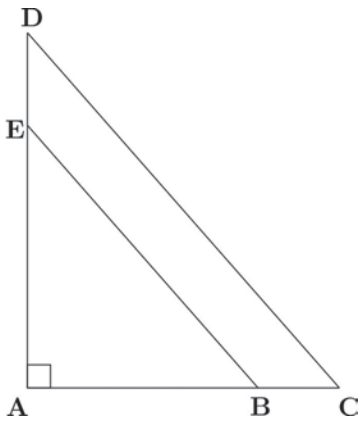


Figura 25.5

Demostrar que
$\triangle ABE \sim \triangle ACD$.

Solución

Como $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$, $\angle ABE \cong \angle ACD$ por ser correspondientes entre paralelas.

Luego, como los triángulos son rectángulos y tienen un ángulo agudo congruente,

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD.$$

Apliquemos el criterio de semejanza **A-A** para probar el siguiente teorema, conocido en algunos textos como **Teorema de Tales**.

Teorema 25.1

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina un segundo triángulo semejante al primero.

Prueba

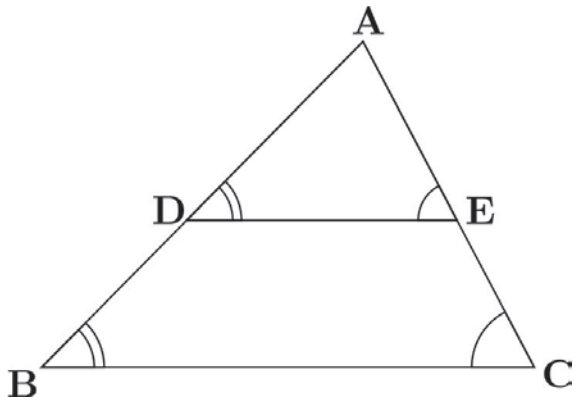


Figura 25.6

En el $\triangle ABC$ si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$,
debemos demostrar que
$\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Como las rectas DE y BC son cortadas por la secante AB,

$\angle ADE \cong \angle B$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas y

$\angle AED \cong \angle C$ por la misma razón,

entonces,

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ por el criterio de semejanza A-A.

Observemos que del Teorema 25.1 se deduce el Teorema Fundamental de la Proporcionalidad, al que no le habíamos hecho la prueba en su momento.

Ejemplo 25.3

Consideremos los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ de la Figura 25.7.

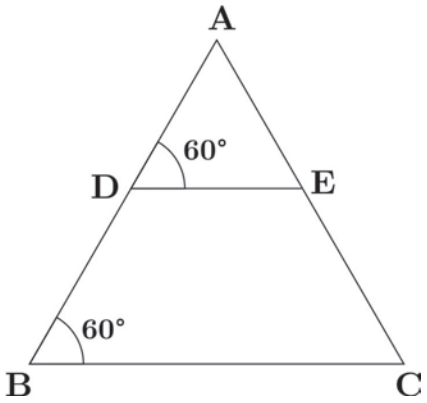


Figura 25.7

Demostrar que

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Solución

Como $\angle ADE \cong \angle ABC$ por tener la misma medida y como son ángulos correspondientes, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Por tanto, por el Teorema 25.1, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Ejemplo 25.4

En la Figura 25.8, $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$ y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se cortan en el punto E.

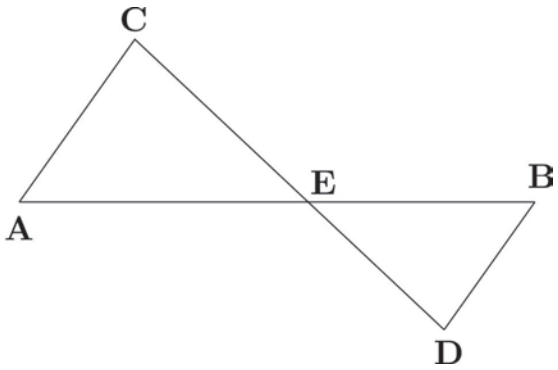


Figura 25.8

Demostrar que:

1. $\triangle ACE \sim \triangle BDE$.
2. $\overline{AE} \cdot \overline{ED} = \overline{CE} \cdot \overline{EB}$.

Solución

1. Como

   $\angle AEC \cong \angle BED$ por ser opuestos por el vértice,

   $\angle ACE \cong \angle BDE$ por ser alternos internos entre paralelas y

   $\angle CAE \cong \angle DBE$ por ser alternos internos entre paralelas,

   entonces

   $\triangle ACE \sim \triangle BDE$ por el criterio de semejanza A-A-A.

2. Como los dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales, es decir, $\frac{\overline{CE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$.

   Luego, $\overline{AE} \cdot \overline{ED} = \overline{CE} \cdot \overline{EB}$.

Ejemplo 25.5

En la Figura 25.9, $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$.

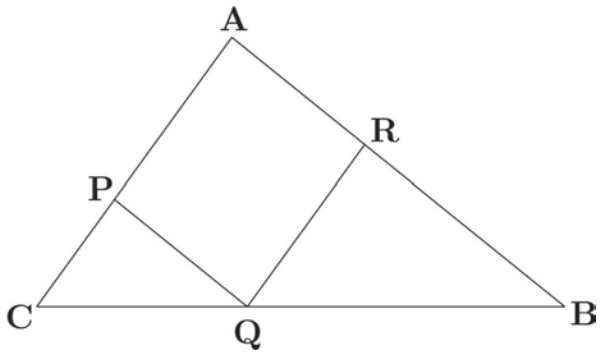


Figura 25.9

Demostrar que
$\triangle CPQ \sim \triangle QRB$
y establecer la proporcionalidad entre lados correspondientes.

Solución

Según el Teorema 25.1, como $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ entonces $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$ y como $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$ entonces $\triangle QRB \sim \triangle CAB$, por lo tanto $\triangle CPQ \sim \triangle QRB$.

Luego, los lados correspondientes son proporcionales y así

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}.$$

Ejemplo 25.6

En la Figura 25.10,

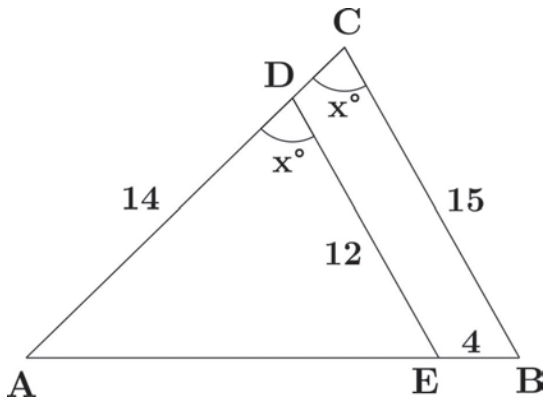


Figura 25.10

$\overline{AD} = 14$, $\overline{DE} = 12$, $\overline{EB} = 4$, $\overline{BC} = 15$,
$\angle C \cong \angle D$ y su medida es $x°$.
Encontrar $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ y $\overline{AB}$.

Solución

Como $\angle ACB \cong \angle ADE$ y son ángulos correspondientes, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.

Por el Teorema 25.1, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Por tanto se cumple que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}.$$

Reemplazando los valores dados tenemos:

$\frac{\overline{AC}}{14} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ o sea $\overline{AC} = \frac{5}{4} \cdot 14 = \frac{5}{2} \cdot 7 = \frac{35}{2}$ y, además,

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ y como $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = \overline{AB} - 4$ entonces

$$\frac{5}{4} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} - 4}$$

$$5 \cdot \overline{AB} - 20 = 4 \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = 20.$$

y

$$\overline{AE} = 20 - 4 = 16.$$

Luego, $\overline{AC} = \frac{35}{2}$, $\overline{AB} = 20$ y $\overline{AE} = 16$.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 25.11,

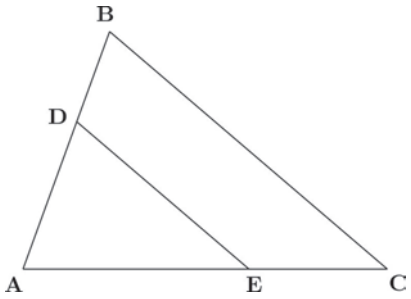


Figura 25.11

$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, $\overline{AC} = 20$, $\overline{EC} = 12$,
$\overline{DB} = 10$ y $\overline{AD} = x$.
Hallar x.

2. En la Figura 25.12,

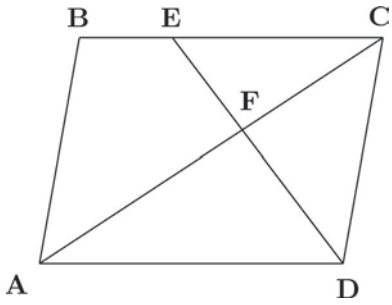


Figura 25.12

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$,
$\overline{AD} = 12$, $\overline{AF} = 15$ y $\overline{FC} = 10$.
Hallar $\overline{EC}$.

3. En la Figura 25.13,

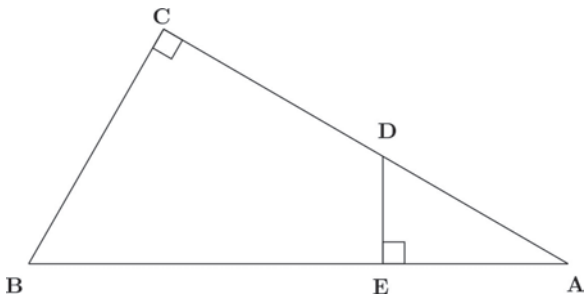


Figura 25.13

$\overline{BC} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$.
Probar que
$\overline{DE} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AE}$.

Respuestas

1. $\frac{20}{3}$.
2. 8.
3. Ayuda: probar que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Lección 26

Otros criterios de semejanza de triángulos

En esta lección veremos dos nuevos criterios de semejanza de triángulos y los criterios de semejanza de triángulos rectángulos relacionados con ellos.

Segundo criterio de semejanza de triángulos

Criterio **lado, ángulo, lado** denotado por **L-A-L**

Si en dos triángulos, dos lados de uno son proporcionales a dos lados del otro y si los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes, entonces los dos triángulos son semejantes.

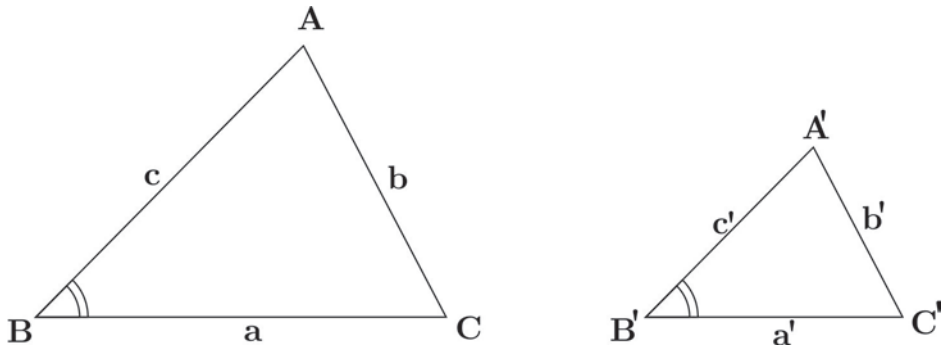


Figura 26.1

Es decir, si $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ y si $\angle B \cong \angle B'$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Ejemplo 26.1

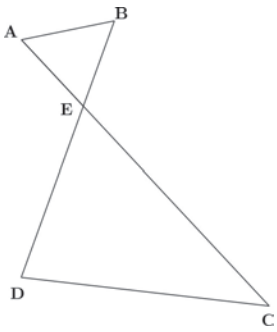


Figura 26.2

En la Figura 26.2, tenemos que

$\overline{AE} = 4$, $\overline{BE} = 3$,

$\overline{DE} = 9$, $\overline{CE} = 12$.

Probar que:

$\triangle AEB \sim \triangle CED$.

Solución

$\angle AEB \cong \angle CED$ por ser opuestos por el vértice y

$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$ ya que $\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$.

Luego,

$\triangle AEB \sim \triangle CED$ por el criterio de semejanza **L-A-L**.

Ejemplo 26.2

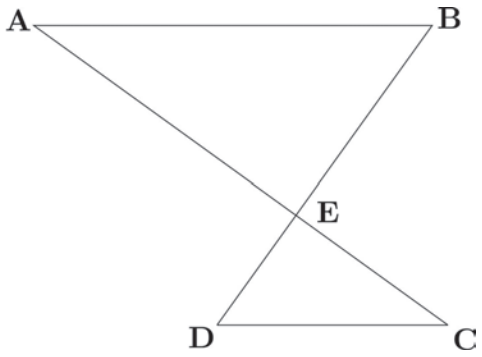


Figura 26.3

En la Figura 26.3, tenemos que

$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$.

Demostrar que:

1) $\triangle AEB \sim \triangle CED$

2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Solución

1. Como $\angle AEB \cong \angle CED$ por ser opuestos por el vértice y como $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}}$, entonces $\triangle AEB \sim \triangle CED$ por el criterio de semejanza **L-A-L**.
2. Como $\angle EAB \cong \angle ECD$ por ser elementos correspondientes de triángulos semejantes y como son ángulos alternos internos congruentes, entonces $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

Nota 26.1

Con base en el criterio de semejanza **L-A-L**, tenemos también que dos triángulos rectángulos son semejantes si los catetos de uno, son proporcionales a los catetos del otro, porque el ángulo entre los catetos es recto.

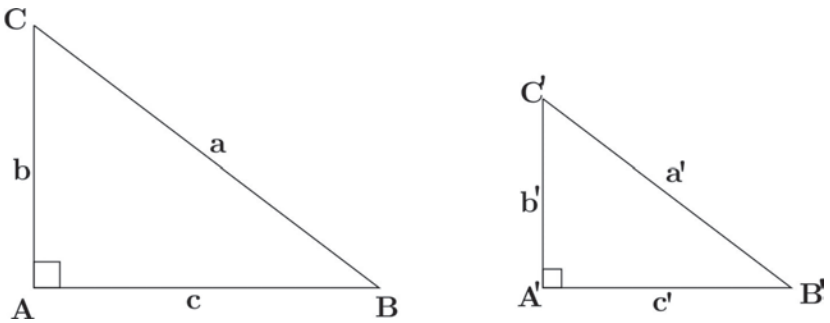


Figura 26.4

Es decir, si $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Tercer criterio de semejanza de triángulos

Criterio **lado, lado, lado** denotado **L-L-L**

Si en dos triángulos los lados de uno son proporcionales a los lados del otro, entonces los dos triángulos son semejantes.

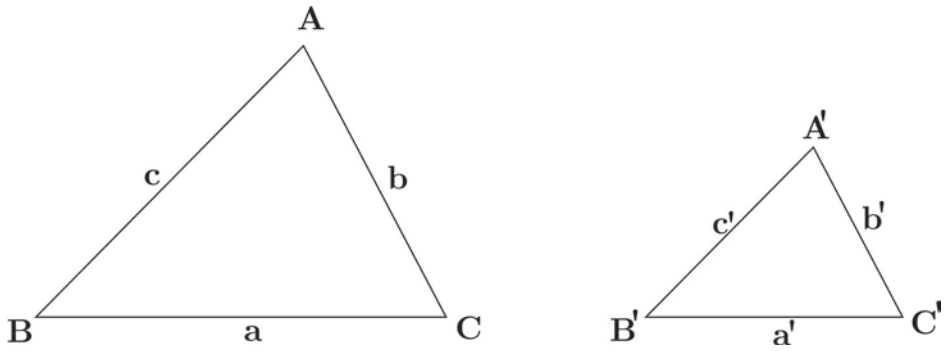
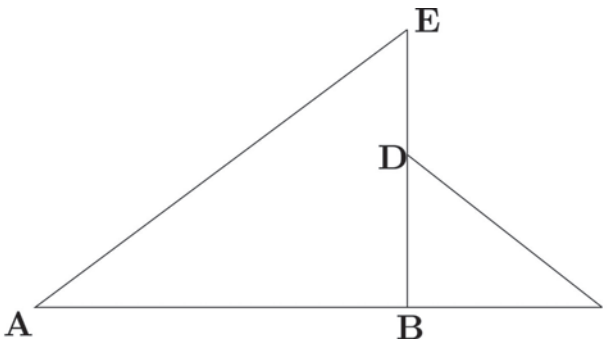


Figura 26.5

Esto es, si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entonces,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Ejemplo 26.3



En la Figura 26.6,
si $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{AE} = 10$,
$\overline{ED} = \overline{DB} = 3$ y $\overline{CD} = 5$,
demostrar que $\triangle ABE \sim \triangle CBD$.

Figura 26.6

Solución

Para aplicar el criterio **L-L-L** veamos si hay proporcionalidad entre los lados, es decir, si se cumple que $\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$.

Observamos que $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 12 - 8 = 4$ y que $\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = 3 + 3 = 6$.

Reemplazando los valores dados tenemos $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$, es decir, los lados correspondientes son proporcionales y por tanto,

$$\triangle ABE \sim \triangle CBD.$$

Ejemplo 26.4

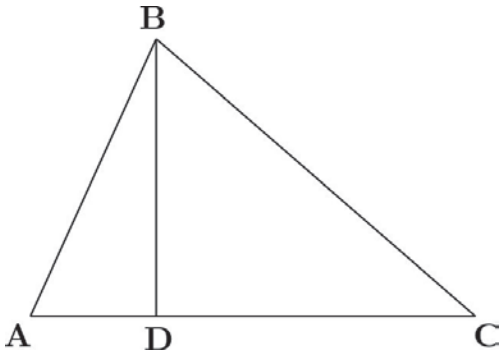


Figura 26.7

En la Figura 26.7,
si $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 20$, $\overline{AD} = 9$,
$\overline{DC} = 16$ y $\overline{DB} = 12$,
demostrar que $\triangle ABD \sim \triangle BDC$.

Solución

Para aplicar el criterio **L-L-L** se debe cumplir que los tres lados de uno de los triángulos sean respectivamente proporcionales a los tres lados del otro triángulo, es decir que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Reemplazando los valores dados tenemos $\frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Luego, los lados correspondientes son proporcionales y por tanto

$$\triangle ABD \sim \triangle BDC.$$

Teorema 26.1

En cualquier triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa, es decir, la altura trazada desde el vértice del ángulo recto hasta la hipotenusa, divide al triángulo en otros dos triángulos que son semejantes entre sí y semejantes al triángulo original.

Demostración

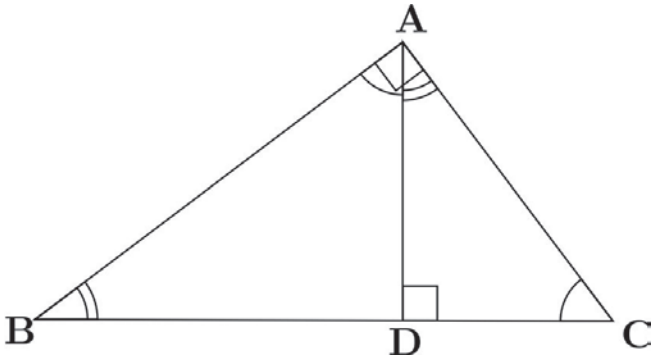


Figura 26.8

Sea $\triangle ABC$ rectángulo,
$\angle A$ recto y
$\overline{AD}$ altura relativa a $\overline{BC}$.
Debemos demostrar que
$\triangle ABC \sim \triangle DAC \sim \triangle DBA$.

Vamos a comparar los triángulos $\triangle DBA$ y $\triangle DAC$.

$\angle B$ es complemento de $\angle C$ y también es complemento de $\angle BAD$, por tanto, $\angle C \cong \angle BAD$ por tener el mismo complemento.

Entonces, $\triangle DAC \sim \triangle DBA$ según el criterio de semejanza A-A.

Si comparamos el $\triangle ABC$ con el $\triangle DAC$ vemos que tienen un ángulo agudo congruente que es el $\angle C$ común a ambos triángulos, y por tanto también son semejantes.

En forma similar, si comparamos el $\triangle ABC$ con el $\triangle DBA$, tienen también un ángulo agudo congruente, ya que el $\angle B$ es común a ambos triángulos, y por tanto son semejantes.

Ejemplo 26.5

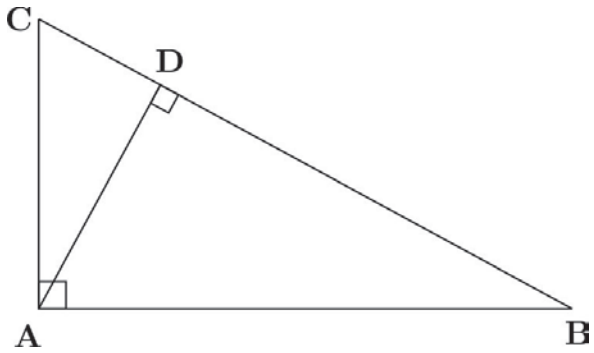


Figura 26.9

En la Figura 26.9,
$\triangle ABC$ con $\angle A$ recto y
$\overline{AD}$ es la altura relativa a la hipotenusa.
Si $\overline{CD} = 5$ y $\overline{AD} = 15$,
hallar los valores de $\overline{DB}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Solución

Según el teorema anterior, $\triangle ADC \sim \triangle ADB$ y por tanto

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}.$$

Luego, $\overline{DB} = \dfrac{\left(\overline{AD}\right)^2}{\overline{CD}} = \dfrac{(15)^2}{5} = 45.$

Igualmente, $\triangle ABC \sim \triangle ADC$. Luego,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}.$$

Tenemos $\left(\overline{AC}\right)^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CD} = 50 \cdot 5 = 250$, por tanto, $\overline{AC} = 5\sqrt{10}$.

En forma similar, $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ y por tanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}.$$

Tenemos $\left(\overline{AB}\right)^2 = \overline{CB} \cdot \overline{BD} = 50 \cdot 45 = 2.250$, por tanto, $\overline{AB} = 15\sqrt{10}$.

Luego, $\overline{DB} = 45$, $\overline{AC} = 5\sqrt{10}$ y $\overline{AB} = 15\sqrt{10}$.

Nota 26.2

Aclaramos que no hemos hecho aquí las pruebas de los criterios de semejanza de triángulos, pero es posible hacerlas.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 26.10,

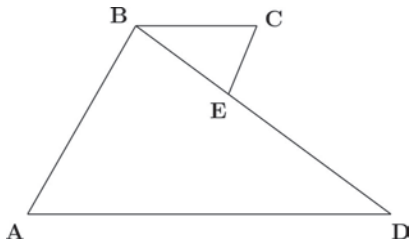


Figura 26.10

Si $\overline{AB} = 21$, $\overline{BC} = 10$,
$\overline{BE} = 8$, $\overline{CE} = 7$,
$\overline{ED} = 16$ y $\overline{AD} = 30$,
demostrar que
$\triangle ABD \sim \triangle BEC$.

2. En la Figura 26.11,

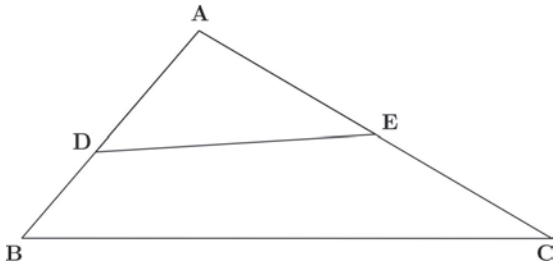


Figura 26.11

Si $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = 18$,
$\overline{AD} = 9$ y $\overline{AE} = 6$,
demostrar que
$\triangle AED \sim \triangle ABC$.

3. En la Figura 26.12,

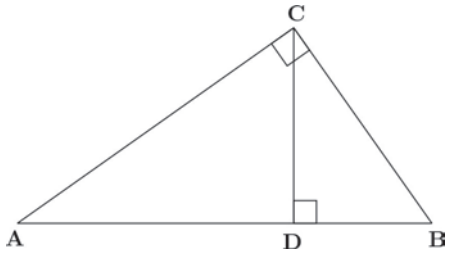


Figura 26.12

$\triangle ACB$ con $\angle C$ recto y
$\overline{CD}$ altura relativa a la hipotenusa.
Si $\overline{AD} = 27$ y $\overline{DB} = 3$,
hallar
$\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Respuestas

1. Ayuda: usar el criterio L-L-L.
2. Ayuda: usar el criterio L-A-L.
3. $\overline{CD} = 9$, $\overline{AC} = \sqrt{30}$ y $\overline{BC} = 3\sqrt{10}$.

Lección 27

Semejanza de triángulos
Problemas

En esta lección resolveremos algunos problemas cuya solución involucra semejanza de triángulos.

Problema 27.1

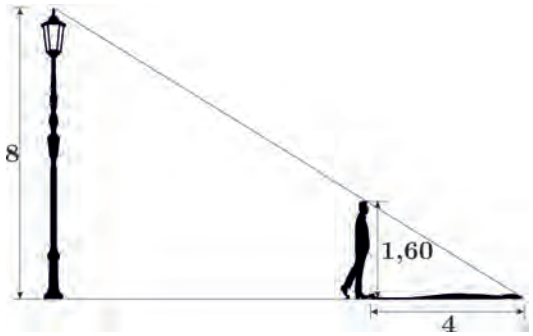


Figura 27.1

Sobre una calle recta, un hombre se aleja caminando desde un poste vertical cuya lámpara está a 8 metros del suelo, como se muestra en la Figura 27.1.

Si el hombre tiene una estatura de $1,60$ metros, ¿a cuántos metros del poste se encuentra cuando su sombra sobre el piso mide 4 metros?

Solución

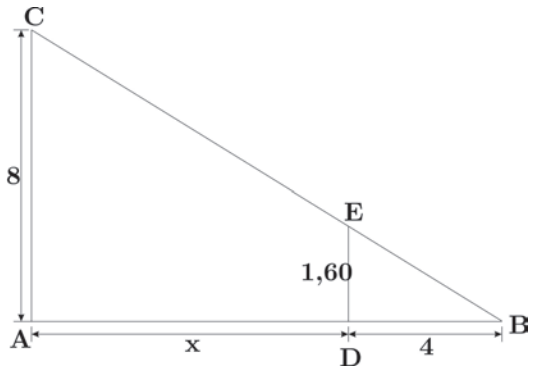


Figura 27.2

Llamemos x la distancia, en metros, del hombre al poste, como se muestra en la Figura 27.2.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE.$$

Luego, sus lados correspondientes son proporcionales y así,

$$\frac{4}{1,60} = \frac{x+4}{8}.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\frac{32}{1,60} = x + 4$$

$$20 = x + 4$$

$$x = 16.$$

Luego, el hombre está a 16 metros del poste cuando su sombra mide 4 metros.

Problema 27.2

Para calcular la altura de un árbol muy alto, un guardabosques mide primero la altura de un árbol más pequeño que está sembrado a 40 metros del árbol alto. Luego se desplaza hasta lograr que el punto más alto de cada uno de los árboles estén en la misma linea visual, como se muestra en la Figura 27.3, y mide qué tan lejos está del árbol pequeño.

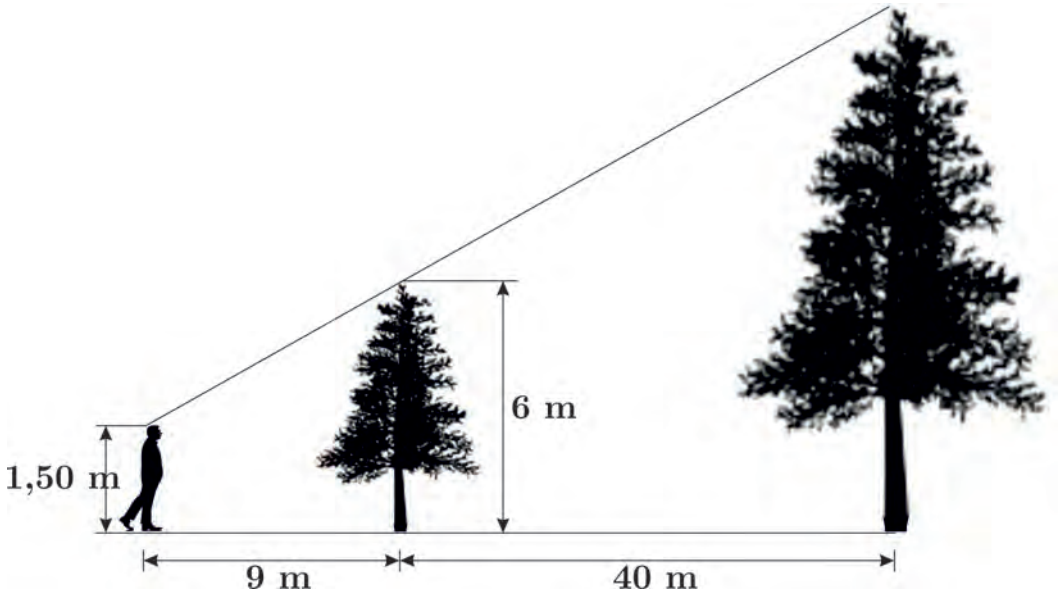


Figura 27.3

Suponiendo que el guardabosques está a 9 metros del árbol pequeño el cual tiene 6 metros de altura y que sus ojos están a $1,50$ metros por encima del suelo, ¿cuánto mide el árbol más alto?

Solución

Llamemos h la altura del árbol más alto. Prolonguemos el segmento que une los puntos más altos de los dos árboles hasta llegar al suelo en un punto A y llamemos x la distancia del guardabosques hasta A, como se muestra en la Figura 27.4.

Para hallar h debemos encontrar primero x.

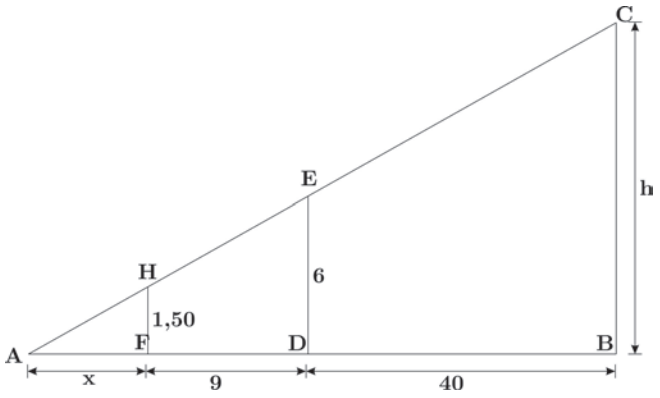


Figura 27.4

Como $\triangle ADE \sim \triangle AFH$, porque $\overline{FH} \parallel \overline{DE}$, entonces sus lados correspondientes son proporcionales y así,

$$\frac{x}{1,50} = \frac{x+9}{6}.$$

Resolvamos esta ecuación para x:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{1,50}\, x &= x + 9 \\
4x &= x + 9 \\
3x &= 9 \\
x &= 9/3 = 3.
\end{aligned}$$

Como $\triangle ABC \sim \triangle AFH$, por ser $\overline{FH} \parallel \overline{BC}$, entonces $\dfrac{h}{49+3} = \dfrac{1,50}{3}$.

Resolvamos esta ecuación para h:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{52} &= \frac{1}{2} \\
h &= \frac{52}{2} \\
h &= 26.
\end{aligned}$$

Por tanto, la altura del árbol más alto es 26 metros.

Problema 27.3

En la Figura 27.5, las carreteras L y M son paralelas y están unidas entre sí por otras dos carreteras $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ que se intersecan en un punto O. Teniendo en cuenta los datos de la Figura **??**, que están dados en kilómetros, hallar la medida de las carreteras $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

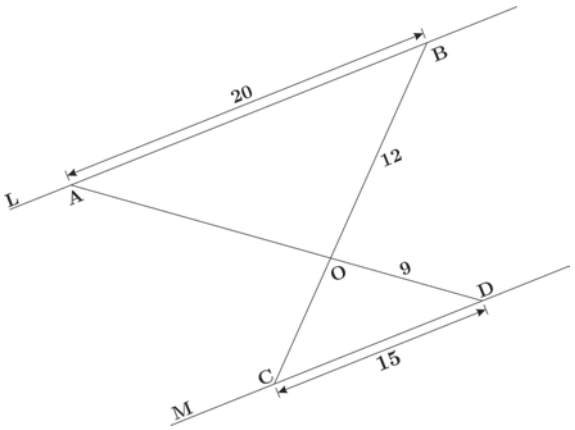


Figura 27.5

Solución

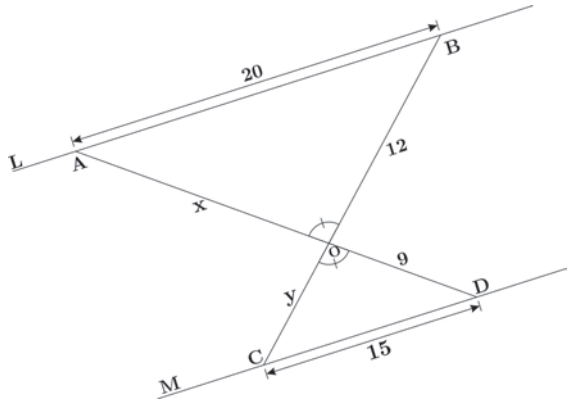


Figura 27.6

Llamemos x la medida del tramo $\overline{AO}$ de la carretera $\overline{AD}$ y y la medida del tramo $\overline{OC}$ de la carretera $\overline{BC}$.

De la Figura 27.6 vemos que la medida de la carretera $\overline{AD}$ es $x+9$ y la de $\overline{BC}$ es $12+y$. Debemos hallar x y y.

Como $\angle COD \cong \angle AOB$ por ser opuestos por el vértice y $\angle DCO \cong \angle ABO$ por ser alternos internos entre paralelas entonces, por el criterio de semejanza A-A, los triángulos $\triangle COD$ y $\triangle BOA$ son semejantes. Luego,

$$\frac{20}{15}=\frac{x}{9} \quad \text{y así} \quad x=\frac{(20)(9)}{15}=12 \qquad \text{y} \qquad \frac{20}{15}=\frac{12}{y} \quad \text{y así} \quad y=\frac{(12)(15)}{20}=9.$$

Por tanto, la medida de la carretera $\overline{AD}$ es $12+9=21\ km$ y la de la carretera $\overline{BC}$ es $12+9=21\ km$.

Problema 27.4

En la Figura 27.7, el $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

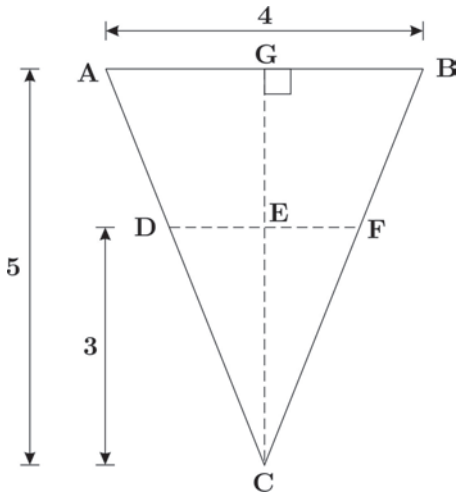


Figura 27.7

Si $\overline{CG}$ es la altura relativa a la base $\overline{AB}$ y si $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, hallar la medida de $\overline{EF}$.

Solución

Como $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, entonces $\triangle CEF \sim \triangle CGB$. Luego, $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CG}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{GB}}$ y así

$$\overline{EF} = \frac{(\overline{CE})(\overline{GB})}{\overline{CG}} \tag{27.1}$$

Como el $\triangle ABC$ es isósceles y $\overline{CG}$ es la altura relativa a la base $\overline{AB}$, entonces $\overline{CG}$ también es mediana y así $\overline{AG} \cong \overline{GB}$. Luego,

$$\overline{GB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(4) = 2.$$

Sustituyendo todos los valores en 27.1 obtenemos

$$\overline{EF} = \frac{(3)(2)}{5} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Problema 27.5

Un tanque tiene 3 metros de ancho. Un hombre de $1,50$ metros de estatura observa, como se muestra en la Figura 27.8, que cuando se ubica a un metro del borde del tanque, la línea visual une el punto C en el borde del tanque con el punto A en el fondo.

¿Cuál es la profundidad del tanque?

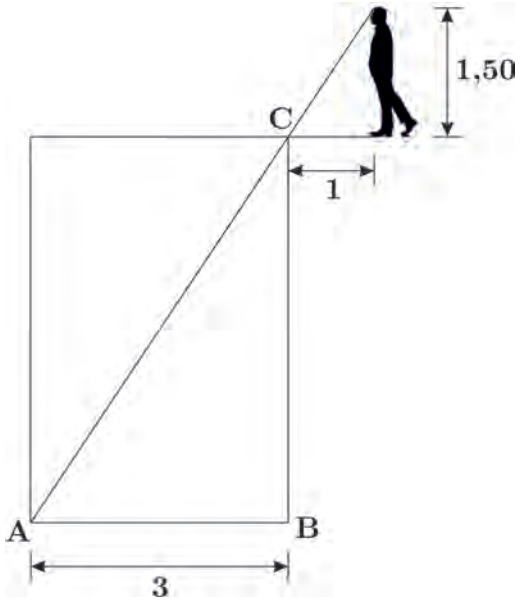


Figura 27.8

Solución

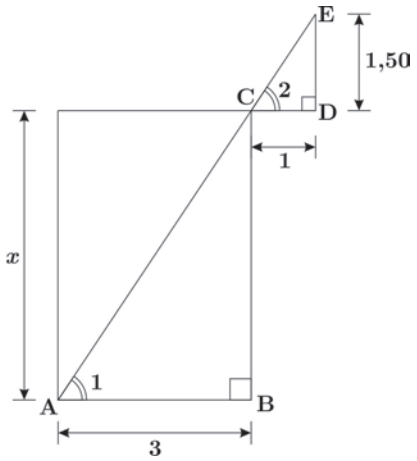


Figura 27.9

Llamemos x la profundidad $\overline{BC}$ del tanque, como se muestra en la Figura 27.9.

Como $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son rectángulos con un ángulo congruente, ya que $\angle 1 \cong \angle 2$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas, porque se supone que el piso es paralelo al fondo del tanque, entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle CDE.$$

Luego,

$$\frac{x}{1,50} = \frac{3}{1}.$$

y así

$$x = 3(1,50) = 4,50.$$

Por tanto, la profundidad del tanque es $4,5\,m$.

Ejercicios propuestos

1. En una calle horizontal, un edificio da una sombra de 5 m al mismo tiempo que un poste de 6 m, próximo a él, proyecta una sombra de 2 m como se muestra en la Figura 27.10.

Figura 27.10

   Hallar la altura h del edificio, si éste y el poste forman ángulo recto con el suelo. Recordar que en un mismo instante, en puntos próximos entre sí, los rayos del sol llegan al suelo formando ángulos congruentes.

2. Un triángulo isósceles cuya base mide 12 cm y la altura correspondiente mide 18 cm, se corta a 10 cm de la base y paralelo a ella, para formar un triángulo más pequeño. Hallar la medida de la base del triángulo más pequeño.

Respuestas

1. $15\,m$.
2. $\dfrac{16}{3}\,cm$.

Lección 28

Semejanza de triángulos
Otros problemas

En esta lección continuaremos resolviendo nuevos problemas donde aplicaremos semejanza de triángulos.

Problema 28.1

Con base en la información suministrada en la Figura 28.1, determinar el ancho $\overline{AC}$ del río recto que aparece en la figura.

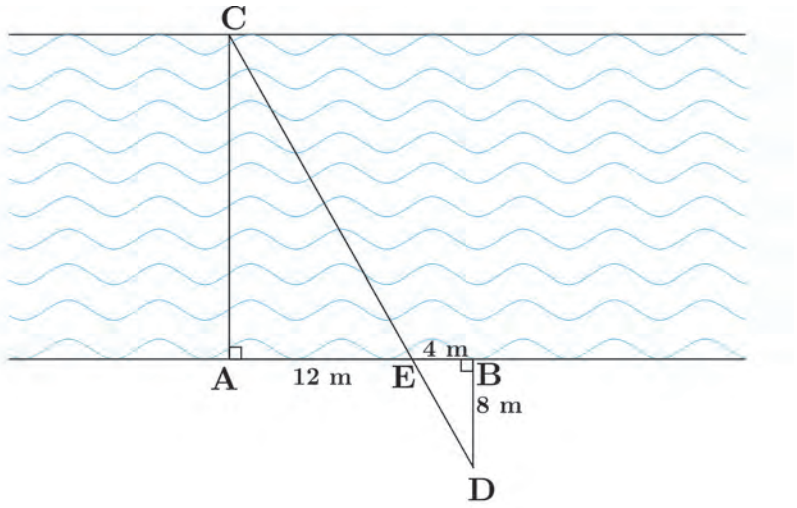


Figura 28.1

Solución

$\angle AEC \cong \angle BED$ por ser opuestos por el vértice y como $\triangle EAC$ y $\triangle EBD$ son rectángulos, por el criterio de semejanza A-A, estos triángulos son semejantes. Por tanto,

$$\frac{\overline{AC}}{12} = \frac{8}{4}.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos

$$\overline{AC} = \frac{8(12)}{4} = 24.$$

Luego, el ancho del río es 24 metros.

Problema 28.2

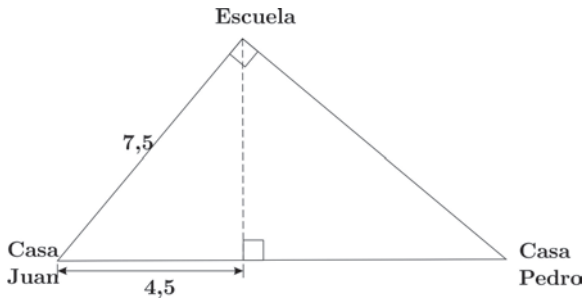


Figura 28.2

Las casas de Juan y Pedro están ubicadas sobre una misma calle recta. Todos los días van a estudiar a una escuela situada como se muestra en la Figura 28.2.

Teniendo en cuenta los datos de la figura, hallar la distancia entre las dos casas y la distancia de la casa de Pedro a la escuela.

Solución

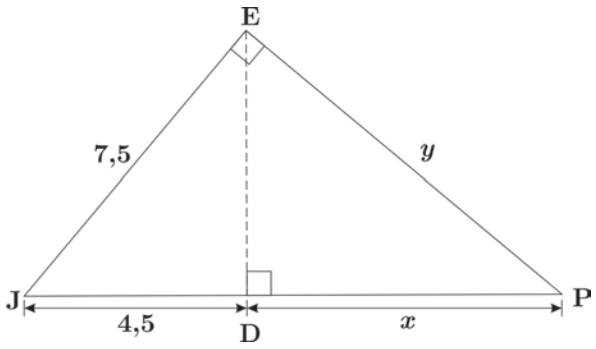


Figura 28.3

Llamemos x la medida de $\overline{DP}$ y y la distancia de la casa de Pedro a la escuela.

Como el $\triangle JEP$ es rectángulo y $\overline{ED}$ es la altura relativa a la hipotenusa, ésta divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre sí y semejantes al triángulo original, esto es,

$$\triangle JEP \sim \triangle JDE \sim \triangle PDE.$$

Como $\triangle JEP \sim \triangle JDE$ entonces

$$\frac{x+4,5}{7,5} = \frac{7,5}{4,5}.$$

Resolvamos esta ecuación para x:

$$x + 4,5 = \frac{(7,5)(7,5)}{4,5}$$

$$x + 4,5 = 12,5$$

$$x = 8.$$

Luego, la distancia entre las dos casas es $4,5 + 8 = 12,5$ kilómetros.

Como $\triangle JEP \sim \triangle PDE$ entonces

$$\frac{y}{12,5} = \frac{8}{y}.$$

Resolvamos esta ecuación para y:

$$y^2 = 8(12,5)$$
$$y^2 = 100$$
$$y = 10.$$

Luego, la distancia de la casa de Pedro a la escuela es 10 kilómetros.

Problema 28.3

En un cierto momento del día, un hombre de 2 metros de estatura mide la sombra de un edificio y encuentra que es de 10 metros y al mismo tiempo mide su sombra la cual es de 1 metro.

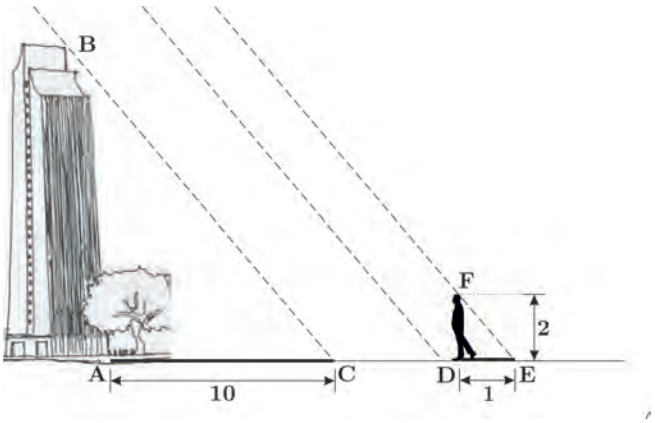


Figura 28.4

Suponiendo, como se muestra en la Figura 28.4, que el terreno es horizontal y que los rayos del sol en un mismo instante son paralelos, hallar la altura del edificio.

Solución

Llamemos $h = \overline{AB}$ la altura del edificio, como se muestra en la Figura 28.5.

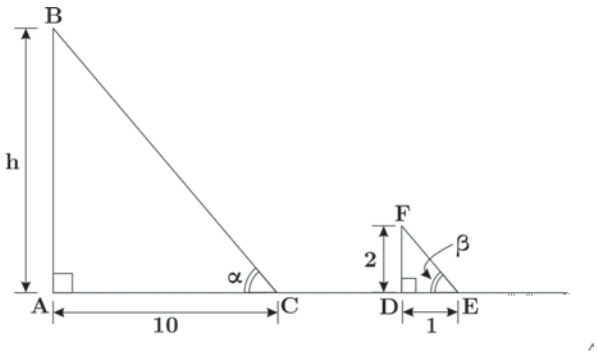


Figura 28.5

Como $\triangle CAB$ y $\triangle EDF$ son rectángulos con un ángulo agudo congruente, ya que $\angle\alpha \cong \angle\beta$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas, entonces $\triangle CAB \sim \triangle EDF$. Luego,

$$\frac{h}{10} = \frac{2}{1}.$$

y así

$$h = 20.$$

Por tanto, la altura del edificio es $20\,m$.

Problema 28.4

En la Figura 28.6, el $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

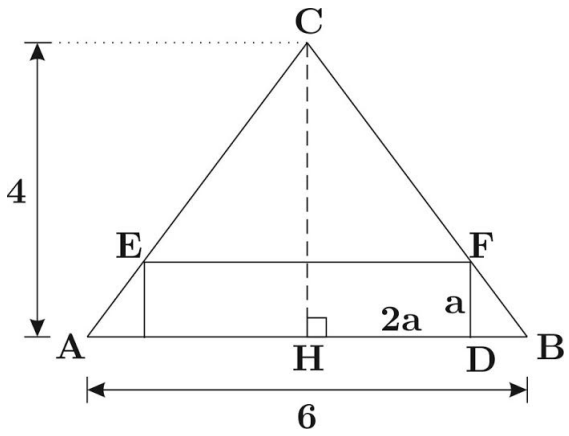


Figura 28.6

Si $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{HC}$, hallar a.

Solución

Como $\triangle ABC$ es isósceles, la altura $\overline{CH}$ relativa a la base también es mediana. Luego, $\overline{AH} \cong \overline{HB}$ y así $\overline{HB} = \frac{1}{2}(6) = 3$.

Como $\overline{DF} \parallel \overline{HC}$, entonces $\triangle DBF \sim \triangle HBC$. Luego,

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{HB}} \tag{28.1}$$

Reemplazando en 28.1 los valores dados tenemos

$$\frac{a}{4} = \frac{3-2a}{3}$$

Resolvamos esta ecuación para a:

$$3a = 4(3-2a)$$

$$3a = 12 - 8a$$

$$11a = 12$$

$$a = \frac{12}{11}.$$

Luego, el valor de a es $12/11$.

Problema 28.5

En la Figura, 28.7 representamos una cancha de tenis.

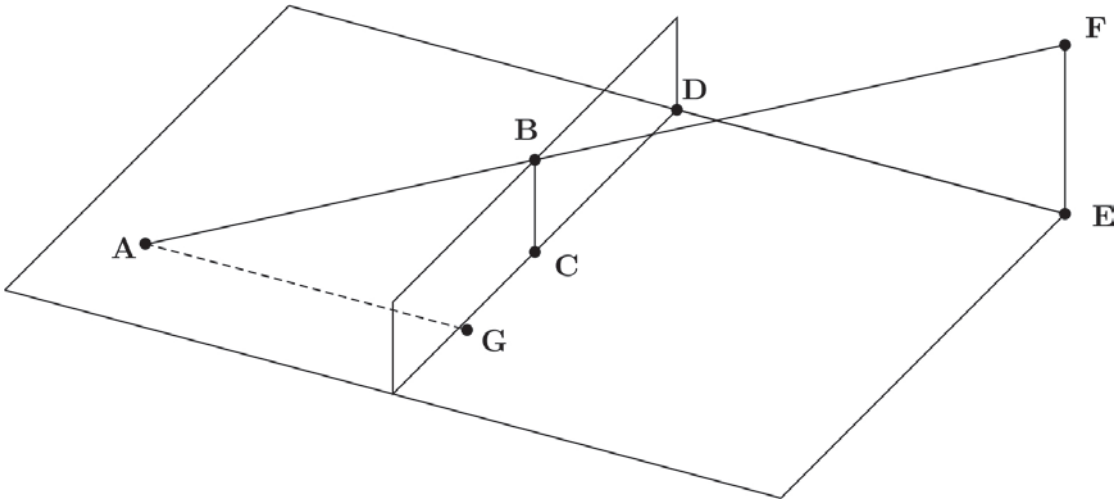


Figura 28.7

Se sirve una bola de tenis desde una altura de 7 pies que pasa justo sobre una red de 3 pies de altura. Si la bola se sirvió desde una distancia de 39 pies de la red y va en línea recta, ¿a qué distancia de la red daría la bola en el piso?

Solución

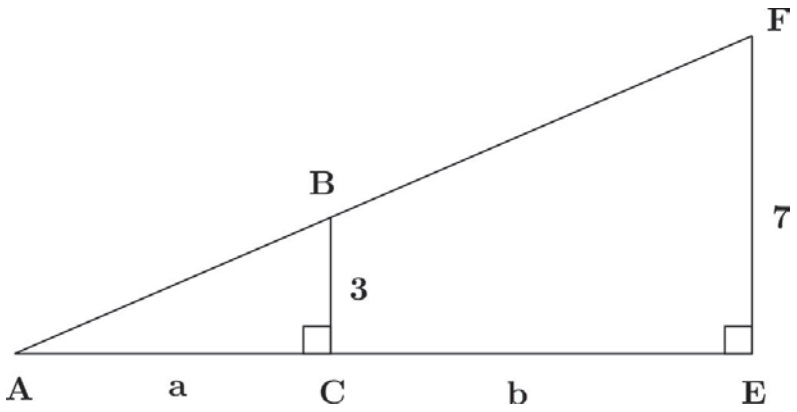


Figura 28.8

En la Figura 28.8 tenemos:

F es el punto desde donde se sirve la bola.

$\overline{EF}$ es la distancia del punto F al piso y es igual a 7 pies.

$\overline{BC} = 3$, es la medida de la altura de la red.

A es el punto donde la bola toca el piso.

E , C y A son puntos colineales con $\overline{EC} = b$ y $\overline{AC} = a$. Debemos hallar el valor de a.

De la Figura 28.8 tenemos que $\triangle ABC \sim \triangle AFE$ por el criterio de semejanza A-A. Luego,

$\frac{7}{3} = \frac{a+b}{a}$ y así $7a = 3a + 3b$ o sea $4a = 3b$ y por tanto $a = \frac{3b}{4}$.

En la Figura 28.9 tenemos:

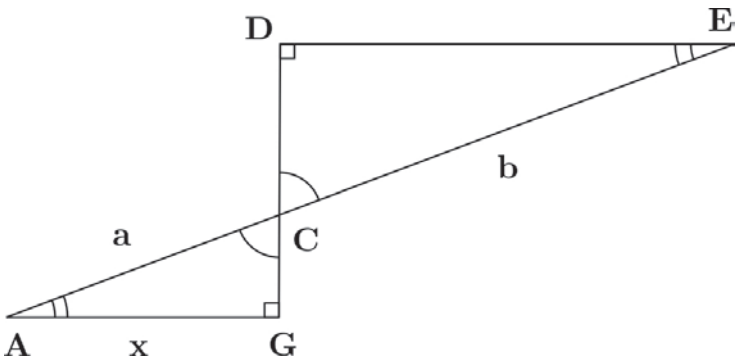


Figura 28.9

$\overline{DE} = 39$, es la distancia de E a la red.

$\overline{AG} = x$, es la distancia de A a la red.

Como $\angle ACG \cong \angle ECD$ por ser opuestos por el vértice y $\angle AGC \cong \angle EDC$ por ser rectos, entonces $\triangle ACG \sim \triangle ECD$ por el criterio de semejanza A-A. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{b}{39} \\ 39a &= xb \\ 39\left(\frac{3b}{4}\right) &= xb \qquad \text{porque } a = \frac{3b}{4} \\ x &= \frac{117}{4} \\ x &= 29,25. \end{aligned}$$

Luego, la bola pega a una distancia de $29,25$ pies de la red.

Ejercicios propuestos

1. Un pescador de $1,50$ metros de estatura, que está parado sobre un muelle de 3 metros de altura sobre un lago y a 2 metros del borde del muelle, lanza un anzuelo con su vara de pescar y atrapa un pez, como se muestra en la Figura 28.10. Si el nylon va en línea recta entre el pescador, el extremo superior del muelle y el pez, ¿a qué distancia del muelle está el pez?

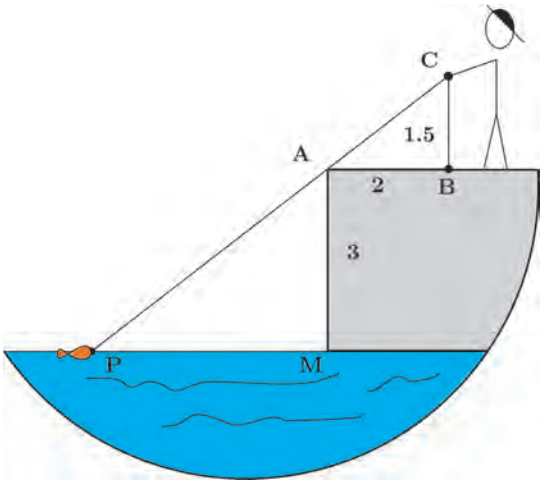


Figura 28.10

2. Juan puede obtener una buena aproximación de la altura de un árbol mediante el procedimiento siguiente: primero, se coloca junto al árbol y hace una señal en él a 5 pies del suelo, entonces se aleja 100 pies del árbol y, volviéndose hacia él, con su brazo estirado, manteniendo vertical una regla de 2 pies frente a sus ojos, la mueve hasta lograr que la regla le tape exactamente la vista de la parte superior del árbol que queda por encima de la señal, como se ve en la Figura 28.11.

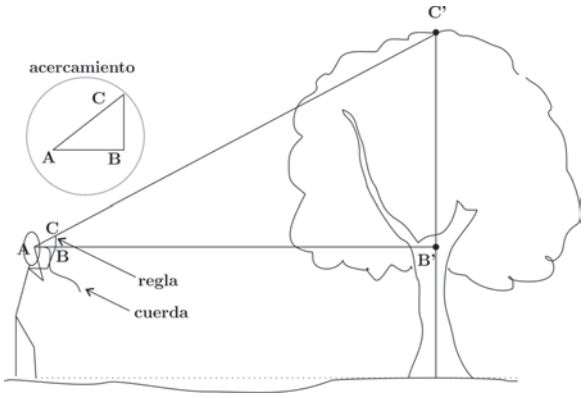


Figura 28.11

La distancia entre su ojo y la regla es de $2,5$ pies. Calcular la altura del árbol.

Respuestas

1. 4 metros.
2. 85 pies.

Lección 29

Polígonos

En esta lección veremos los polígonos a partir del concepto de línea poligonal, sus nombres de acuerdo al número de lados y algunos de sus elementos y propiedades.

Llamamos **línea poligonal** o simplemente **poligonal** a la línea que resulta de unir en forma consecutiva los puntos extremos de varios segmentos de recta.

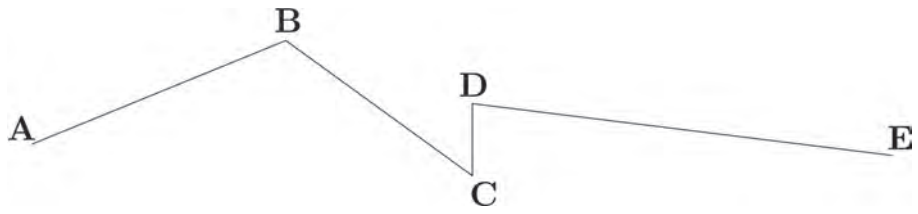


Figura 29.1

Dados los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$, la línea poligonal que resulta de unir entre sí los segmentos la denotamos por $ABCDE$, a los puntos B, C y D los llamamos **vértices** y a los segmentos de recta **lados** de la poligonal.

Una línea poligonal puede ser abierta o cerrada. Cuando el último de los extremos del último segmento que forma la poligonal coincide con el primer extremo del primer segmento, la poligonal es **cerrada**. Si el último extremo del último segmento no coincide con el primer extremo del primer segmento, la línea poligonal es **abierta**.

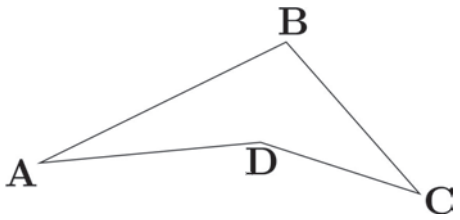


Figura 29.2

Por ejemplo, la línea poligonal de la Figura 29.1 es abierta y la de la Figura 29.2 es cerrada.

Cuando al prolongar en los dos sentidos cualesquiera de los lados de una línea poligonal, toda la poligonal queda en un mismo semiplano decimos que la poligonal es **convexa**.

Si al prolongar alguno de los lados de una línea poligonal en los dos sentidos, una parte de la poligonal queda en un semiplano y la otra en el otro semiplano, decimos que la poligonal es **cóncava**.

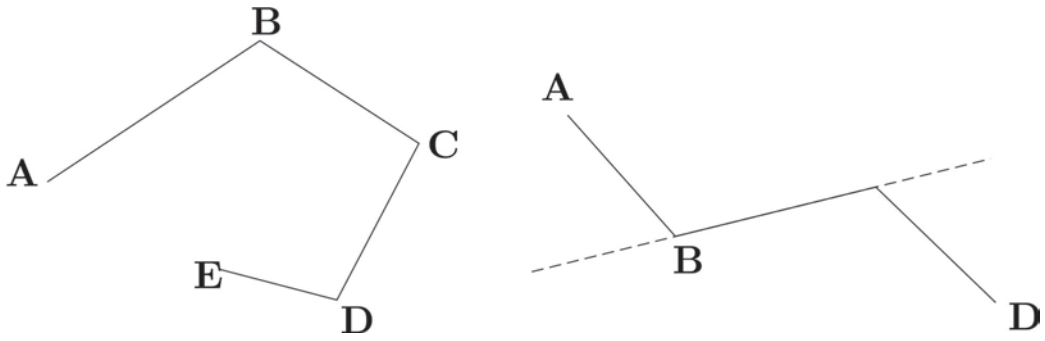


Figura 29.3

La línea del lado izquierdo de la Figura 29.3 es una línea poligonal convexa y la de la derecha es cóncava.

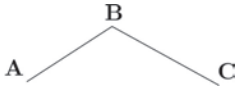
Ejemplo 29.1

Trazar una línea poligonal convexa y abierta cuyo número de lados sea el que se indica en cada numeral y decir cuántos vértices tiene en cada caso.

1. Dos.
2. Tres.
3. Cuatro.
4. Cinco.

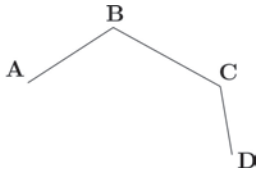
¿Cuál es la relación entre el número de lados y el número de vértices?

Solución



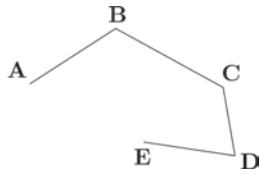
1. 2 lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

   1 vértice B



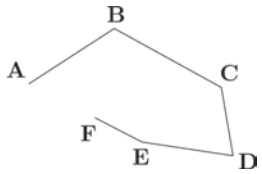
2. 3 lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$

   2 vértices B y C



3. 4 lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$

3 vértices B, C y D



4. 5 lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$

4 vértices B, C, D y E

Figura 29.4

Número de lados	**Número de vértices**
2	$1 = 2 - 1$
3	$2 = 3 - 1$
4	$3 = 4 - 1$
5	$4 = 5 - 1$

Entonces, si el número de lados de la poligonal es n, el número de vértices será $n - 1$.

Polígono

Llamamos polígono a la porción de plano finita limitada por una línea poligonal cerrada.

Los **vértices** de la línea poligonal son los vértices del polígono y los **lados** de la poligonal son los lados del polígono.

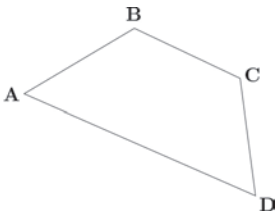


Figura 29.5

En la Figura 29.5,

A, B, C, D son los vértices del polígono y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son los lados del polígono.

El número de vértices de un polígono es igual al número de lados.

Si la línea poligonal que limita un polígono es convexa decimos que el polígono es **convexo**. Cuando la línea poligonal es cóncava decimos que el polígono es **cóncavo**.

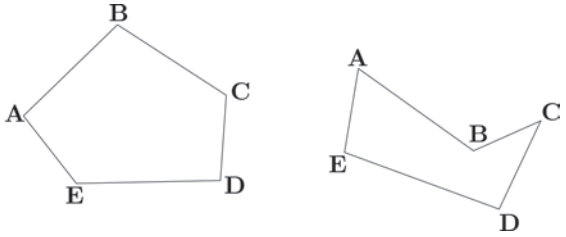


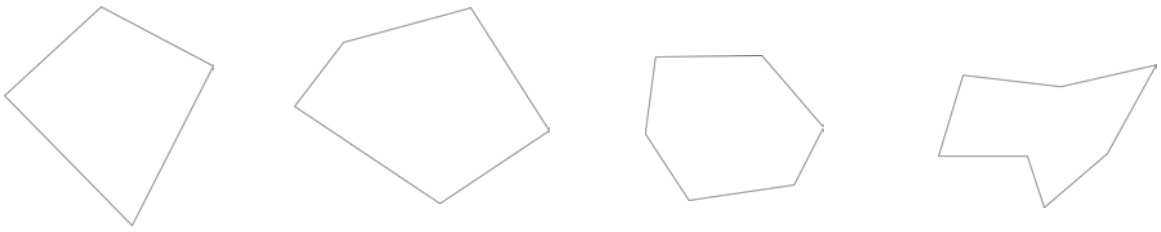
Figura 29.6

El polígono de la izquierda de la Figura 29.6 es convexo y el de la derecha es cóncavo.

Según el número de lados, los polígonos reciben nombres especiales, algunos de los cuales se listan en la siguiente tabla. El polígono con el menor número de lados es el triángulo.

Número de lados	**Nombre**
Tres	Triángulo
Cuatro	Cuadrilátero
Cinco	Pentágono
Seis	Hexágono
Siete	Heptágono
Ocho	Octágono
Nueve	Nonágono
Diez	Decágono
Once	Endecágono
Doce	Dodecágono
n	Eneágono

En la Figura 29.7 trazamos algunos de estos polígonos.



Cuadrilátero Pentágono Hexágono Heptágono

Figura 29.7

Ejemplo 29.2

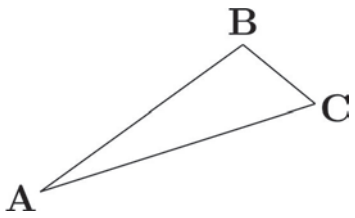
Trazar una línea poligonal convexa y cerrada cuyo número de lados sea el que se indica en cada numeral y decir cuántos vértices tiene en cada caso.

1. Dos.
2. Tres.
3. Cuatro.
4. Cinco.

De acuerdo con el número de lados, ¿cómo se llama el polígono que se forma en cada caso?

Solución

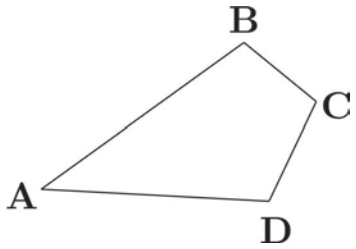
1. Para construir una poligonal cerrada convexa se requieren tres o más segmentos de recta.



2. 3 lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$

3 vértices A, B y C

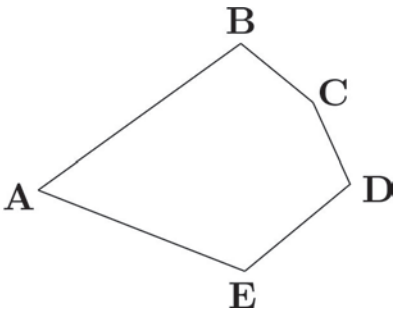
Triángulo



3. 4 lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$

4 vértices A, B, C y D

Cuadrilátero



4. 5 lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$

5 vértices A, B, C, D y E

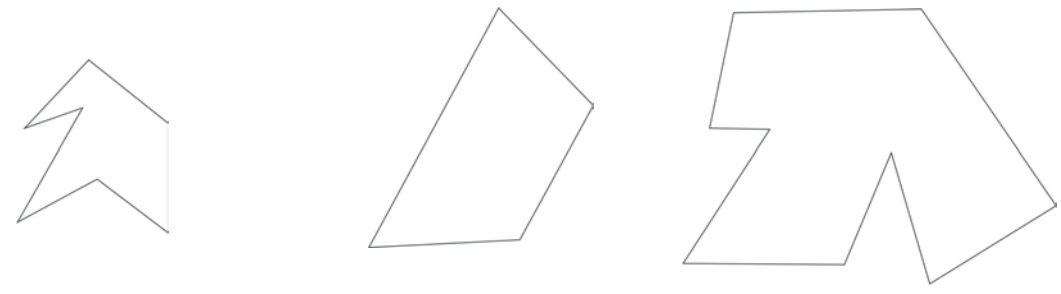
Pentágono

Figura 29.8

Entonces, el número de lados del polígono es igual al número de vértices.

Ejemplo 29.3

En cada numeral decir el nombre del polígono de acuerdo con el número de lados y si es cóncavo o convexo.



1. 2. 3.

4. 5.

Figura 29.9

Solución

1. Heptágono y es cóncavo.
2. Cuadrilátero y es convexo.
3. Nonágono y es cóncavo.
4. Hexágono y es cóncavo.
5. Hexágono y es convexo.

En adelante trabajaremos con polígonos convexos.

Un polígono es **equilátero** si tiene todos sus lados congruentes entre sí.

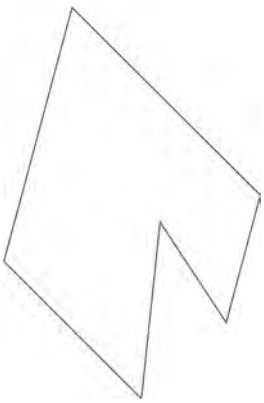
Llamamos **lados consecutivos** de un polígono a los lados que tienen un vértice común.

Los vértices que son los puntos extremos de un lado del polígono se llaman **vértices consecutivos** del polígono. Son **vértices opuestos** de un polígono los vértices que no son consecutivos a un vértice dado.

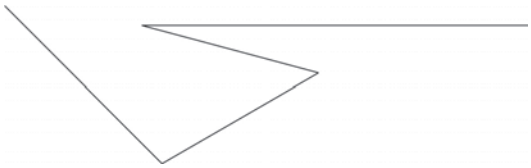
En un triángulo cada vértice es consecutivo con los otros dos.

Ejercicios propuestos

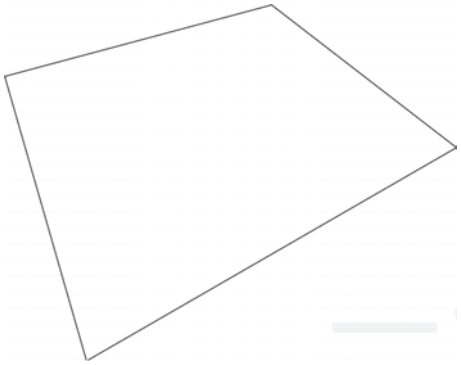
1. Clasificar las siguientes líneas polígonales en cóncavas o convexas y abiertas o cerradas.



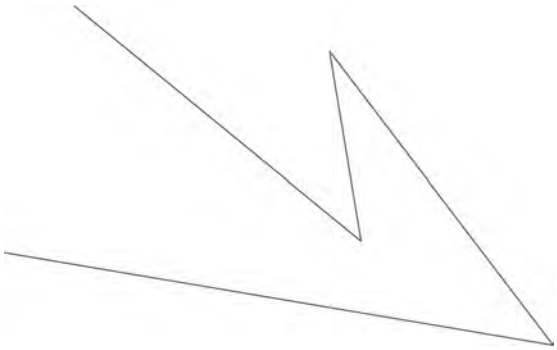
(a)



(b)



(c)



(d)

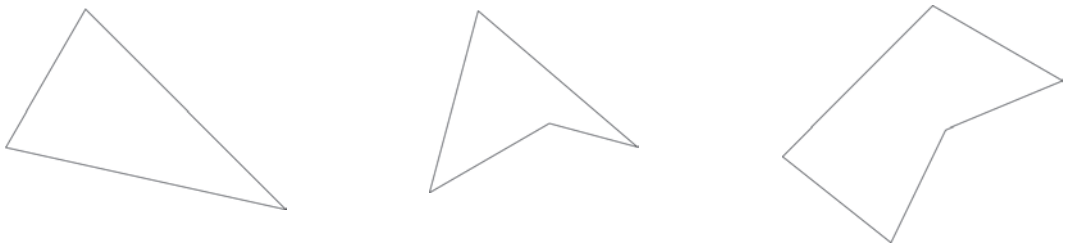
Figura 29.10

2. Trazar en cada literal un polígono que cumpla las condiciones dadas.
   (a) Triángulo convexo.
   (b) Cuadrilátero cóncavo.
   (c) Pentágono cóncavo.
   (d) Heptágono cóncavo.
   (e) Nonágono convexo.

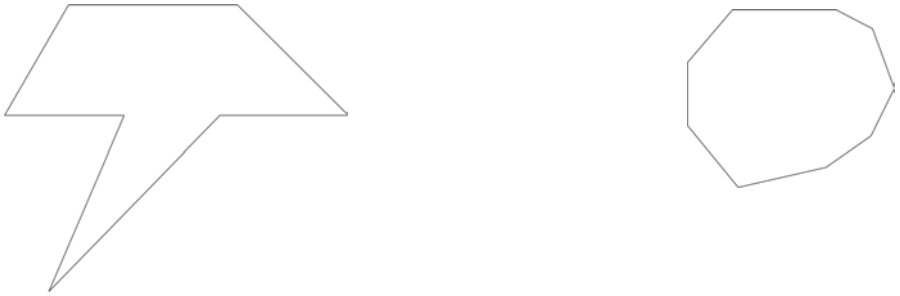
Respuestas

1. (a) Cóncava cerrada.
   (b) Cóncava abierta.
   (c) Convexa cerrada.
   (d) Cóncava abierta.

2.



(a) (b) (c)



(d) (e)

Figura 29.11

Lección 30

Ángulos y diagonales de un polígono

En esta lección veremos los nombres y propiedades de los ángulos de un polígono y de sus diagonales y la suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono convexo. Veremos además cuándo un polígono se llama polígono regular.

Los ángulos de un polígono que comparten un lado del polígono se llaman **ángulos consecutivos** del polígono. Los otros ángulos del polígono se llaman **ángulos opuestos** del polígono.

Como un polígono está limitado por una línea poligonal cerrada, y como dos rectas que se cortan forman un ángulo, cada vértice de un polígono es a su vez vértice de un ángulo del polígono.

Los **ángulos interiores** de un polígono son los ángulos formados por dos lados consecutivos del polígono.

Se llama **ángulo exterior** de un polígono el ángulo formado por un lado y la prolongación del lado consecutivo.

En un triángulo cada ángulo es consecutivo con los otros dos.

Se llama **diagonal** de un polígono al segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

Por ejemplo, en el polígono $ABCDE$ de la Figura 30.1 tenemos:

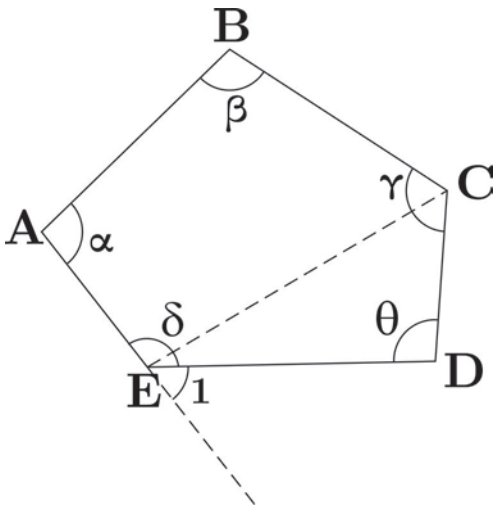


Figura 30.1

- Los vértices del polígono son A, B, C, D y E.
- A y C son vértices consecutivos con B.
- E y D son vértices opuestos a B.
- $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos consecutivos.
- $\angle\gamma$ y $\angle\theta$ son ángulos opuestos al $\angle\alpha$.
- $\angle\delta$ es un ángulo interior.
- $\angle 1$ es un ángulo exterior.
- $\overline{EC}$ es una diagonal.

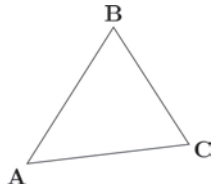
Ejemplo 30.1

Trazar y contar todas las diagonales posibles en cada uno de los siguientes polígonos convexos:

1. Triángulo.
2. Cuadrilátero.
3. Pentágono.
4. Hexágono.
5. Heptágono.

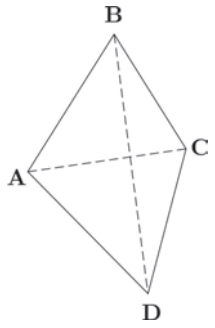
Deducir una fórmula para el número de diagonales posibles en un eneágono.

Solución



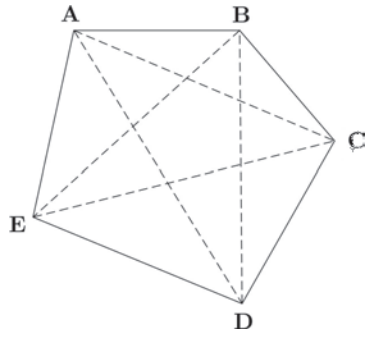
1. Triángulo ABC

3 lados 0 diagonales



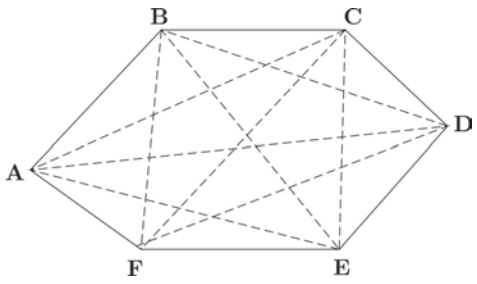
2. Cuadrilátero $ABCD$

4 lados 2 diagonales



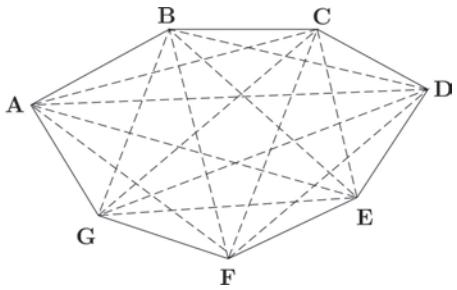
3. Pentágono $ABCDE$

5 lados 5 diagonales



4. Hexágono $ABCDEF$

6 lados 9 diagonales



5. Heptágono $ABCDEFG$

7 lados 14 diagonales

Figura 30.2

En general, desde un vértice cualquiera de un polígono de n lados pueden trazarse $n-3$ diagonales, ya que si desde dicho vértice trazamos todas las posibles diagonales, tenemos tres

vértices a los cuales no podemos trazar diagonales, el mismo vértice y los dos vértices consecutivos, y como el número de vértices es igual al número de lados, el número de diagonales trazadas desde dicho vértice es $n-3$.

Entonces, desde los n vértices podemos trazar $n(n-3)$ diagonales, pero cada una de estas diagonales estaría contada dos veces porque cada diagonal une dos vértices. Luego, el número de diagonales de un eneágono está dado por

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Verificar el resultado con los valores obtenidos en este ejemplo.

¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo?

Si a partir de un vértice de un polígono convexo trazamos todas las diagonales, dividimos el polígono en triángulos.

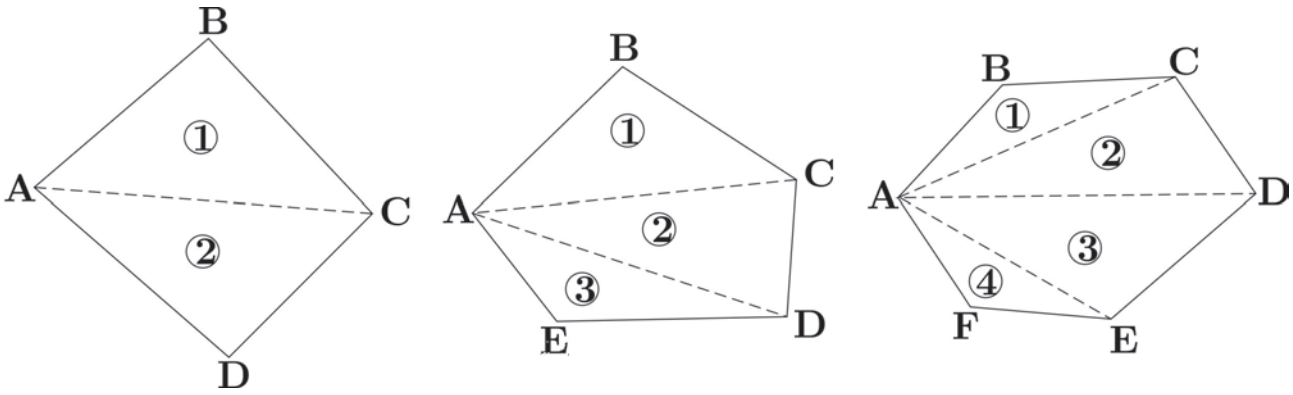


Figura 30.3

En la Figura 30.3 observamos:

Si el polígono es un cuadrilátero al trazar las diagonales desde un vértice obtenemos dos triángulos y por tanto la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es $2(180°) = 360°$.

Si es un pentágono obtenemos tres triángulos y por tanto la suma de los ángulos interiores de un pentágono es $3(180°) = 540°$.

Si es un hexágono obtenemos cuatro y por tanto la suma de los ángulos interiores de un hexágono es $4(180°) = 720°$.

En general, si n es el número de lados de un polígono convexo, o sea, si tenemos un eneágono, la suma de sus ángulos interiores es

$$(n-2)180°.$$

Ejemplo 30.2

Cuál es la suma de los ángulos interiores de un octágono y de un nonágono?

Solución

Como el octágono tiene 8 lados, la suma de los ángulos interiores es $(8-2)180° = 6(180°) = 1.080°$

Como el nonágono tiene 9 lados, la suma de los ángulos interiores es $(9-2)180° = 7(180°) = 1.260°$.

¿Cuál es la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo?

Cada ángulo interno de un polígono y su adyacente externo forman un ángulo llano.

La suma de los ángulos internos y los ángulos externos de un polígono es igual al número de vértices multiplicado por 180°.

Luego, si n es el número de lados de un polígono entonces n es el número de vértices y la suma de los ángulos exteriores es igual a

$$n(180°) - (n-2)180° = n(180°) - n(180°) + 2(180°) = 360°.$$

Es decir, la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360°, independiente del número de lados.

Un polígono se llama **equiángulo** si todos sus ángulos son congruentes entre sí.

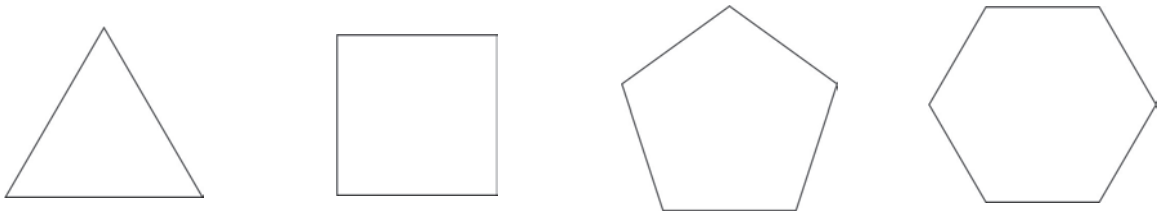
Polígono regular

Decimos que un polígono es **regular** cuando tiene todos sus lados congruentes entre sí y todos sus ángulos interiores congruentes entre sí.

Todo polígono regular es equilátero y equiángulo.

Un cuadrilátero regular se llama **cuadrado**.

Los polígonos de la Figura 30.4 son regulares



Triángulo equilátero Cuadrado Pentágono regular Hexágono regular

Figura 30.4

Ejemplo 30.3

¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un polígono regular de n lados? Si los polígonos del Ejemplo 30.1 son regulares, ¿cuánto mide en cada caso un ángulo interior del polígono?

Solución

Vimos que si n es el número de lados de un polígono, la suma de los ángulos interiores es

$$(n-2)180^\circ,$$

y como un polígono convexo tiene el mismo número de ángulos que de lados, entonces cada ángulo interior de un polígono regular mide

$$\frac{n-2}{n}(180^\circ).$$

Luego,

1. Para el triángulo equilátero, $n = 3$, y así, cada ángulo interior de un triángulo equilátero mide
$$\frac{3-2}{3}(180^\circ) = \frac{1}{3}(180^\circ) = 60^\circ.$$

2. Para el cuadrado, $n = 4$, y así, cada ángulo interior de un cuadrado mide
$$\frac{4-2}{4}(180^\circ) = \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ.$$

3. Para el pentágono regular, $n = 5$, y así, cada ángulo interior de un pentágono regular mide
$$\frac{5-2}{5}(180^\circ) = \frac{3}{5}(180^\circ) = 108^\circ.$$

4. Para el hexágono regular, $n = 6$, y así, cada ángulo interior de un hexágono regular mide
$$\frac{6-2}{6}(180^\circ) = \frac{2}{3}(180^\circ) = 120^\circ.$$

5. Para el heptágono regular, $n = 7$, y así, cada ángulo interior de un heptágono regular mide
$$\frac{7-2}{7}(180^\circ) = \left(\frac{900}{7}\right)^\circ.$$

Ejemplo 30.4

En el cuadrilátero $ABCD$ de la Figura 30.5, $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos y $\angle D = 110^\circ$.

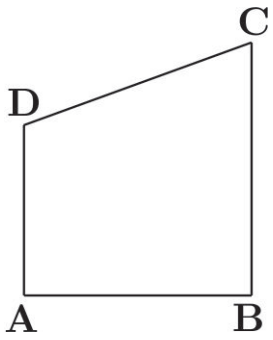


Figura 30.5

1. ¿Cuál es la medida de $\angle C$?
2. ¿Cuántos ángulos exteriores se forman en el vértice D? ¿Son estos ángulos congruentes? ¿Por qué?
3. La suma de las medidas de los lados de un cuadrilátero se conoce como perímetro del cuadrilátero. Suponiendo que $m(\overline{AB}) = 2\,cm$, $m(\overline{BC}) = 2,2\,cm$, $m(\overline{CD}) = 2,1\,cm$ y $m(\overline{AD}) = 1,8\,cm$, hallar el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ de la Figura 30.5.

Solución

Como la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)(180°)$, para un cuadrilátero será $(4-2)180° = 2(180)° = 360°$.

1. Luego,

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360° \\ 90° + 90° + \angle C + 110° &= 360° \\ \angle C + 290° &= 360° \\ \angle C &= 360° - 290° \\ \angle C &= 70°. \end{aligned}$$

2. Se forman dos ángulos adyacentes al $\angle D$ y ambos miden 70° por ser ambos suplemento del mismo $\angle D$ que mide 110°. Luego, ambos ángulos son congruentes.
3. Perímetro del cuadrilátero $ABCD = m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) + m(\overline{CD}) + m(\overline{AD}) = 2\,cm + 2,2\,cm + 2,1\,cm + 1,8\,cm = 8,1\,cm$.

Ejercicios propuestos

1. ¿Cuál es la medida de un ángulo exterior de un polígono regular de n lados?
2. ¿Cuál es la medida de un ángulo exterior de un triángulo equilátero?
3. ¿Cuál es la medida de un ángulo exterior de un cuadrado?
4. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior mide 72°?
5. ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores miden cada uno 135°?
6. ¿Cuál es el número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice de un decágono?
7. ¿Cuál es el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 20 lados?
8. ¿Cuál es el polígono en el cual pueden trazarse nueve diagonales desde un vértice?

Respuestas

1. $\frac{360^\circ}{n}$.
2. 120°.
3. 90°.
4. Pentágono.
5. Octágono.
6. 7.
7. 170.
8. Dodecágono.

Lección 31

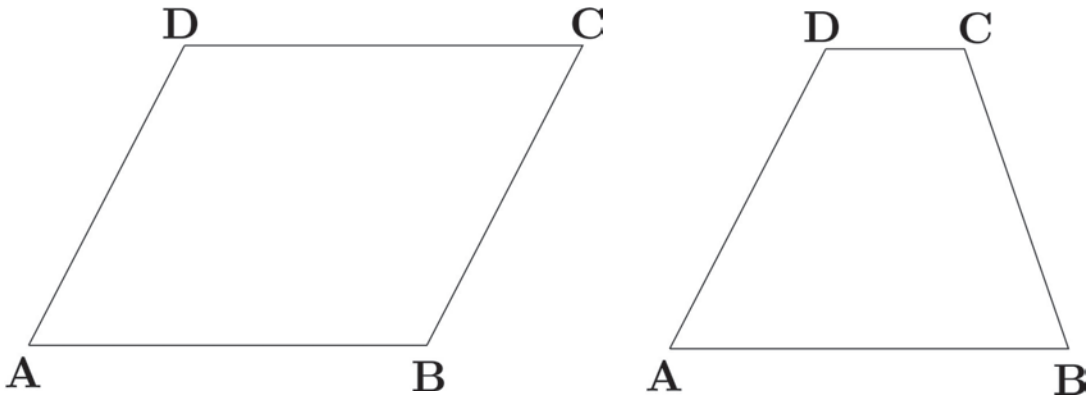
Cuadriláteros

En esta lección iniciaremos el trabajo con cuadriláteros y, en particular, con algunos de ellos, llamados paralelogramos y trapecios, que resultan de la clasificación según sus lados. Para los paralelogramos presentaremos además las propiedades de sus lados y de sus ángulos.

Como vimos antes, un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados.

Teniendo en cuenta el paralelismo de los lados opuestos, algunos cuadriláteros son:

- **Paralelogramos**: si los lados opuestos son paralelos dos a dos.
- **Trapecios**: si sólo tienen un par de lados opuestos paralelos.



Paralelogramo $ABCD$
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Trapecio $ABCD$
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Figura 31.1

Veamos a continuación el paralelogramo y algunos teoremas que nos presentan las propiedades de sus lados y de sus ángulos.

Paralelogramo

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos.

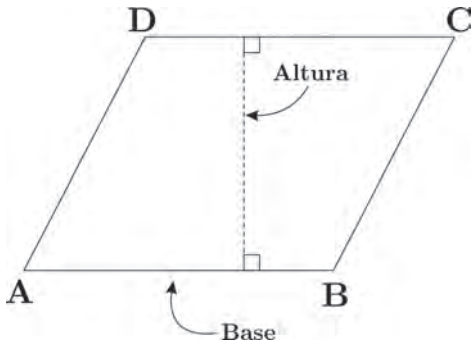


Figura 31.2

En la Figura 31.2,

Paralelogramo $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Cualquier lado del paralelogramo puede llamarse **base**, por ejemplo el lado $\overline{AB}$.

La **altura** es el segmento de recta perpendicular a la base, cuyos extremos están en la base y en el lado opuesto a ésta.

Teorema 31.1 - *Lados de un paralelogramo*

En un paralelogramo los lados opuestos son congruentes dos a dos.

Prueba

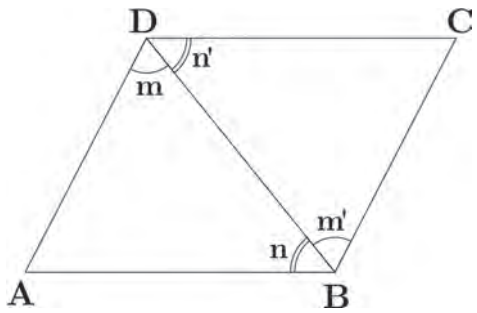


Figura 31.3

Sea $ABCD$ un paralelogramo.

Debemos probar que:

$$\overline{AB} \cong \overline{DC} \quad \text{y} \quad \overline{AD} \cong \overline{BC}.$$

Tracemos la diagonal $\overline{BD}$ y consideremos los ángulos m, n, m' y n' como se muestran en la Figura 31.3.

Como

$\angle m \cong \angle m'$ por ser alternos internos entre paralelas,

$\overline{BD} \cong \overline{BD}$ por ser lado común del $\triangle ABD$ y del $\triangle CDB$ y

$\angle n \cong \angle n'$ por ser alternos internos entre paralelas,

entonces

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$, por el criterio de congruencia A-L-A.

Luego,

$$\overline{AB} \cong \overline{DC} \quad \text{y} \quad \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Notas 31.1

- De la prueba anterior concluimos que cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.
- La prueba del teorema anterior es inmediata si tenemos en cuenta que dos segmentos de recta paralelos comprendidos entre dos rectas paralelas son congruentes, por teorema que vimos en una lección anterior.
- El recíproco del teorema anterior también es válido. Esto es, todo cuadrilátero convexo cuyos lados opuestos son congruentes dos a dos es un paralelogramo.
- Como consecuencia de la definición de paralelogramo y del teorema anterior, todo cuadrilátero convexo con dos lados opuestos congruentes y paralelos es un paralelogramo.

Teorema 31.2 - *Ángulos de un paralelogramo*

En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes dos a dos.

Prueba

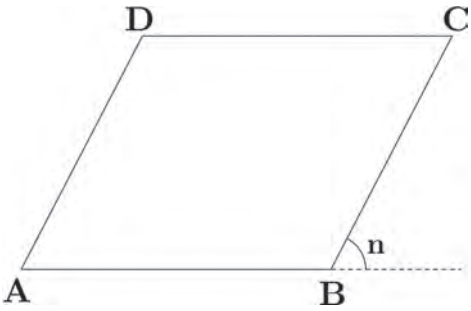


Figura 31.4

Sea $ABCD$ un paralelogramo.

Debemos probar que:

$\angle A \cong \angle C$ y $\angle B \cong \angle D$.

Prolonguemos el lado $\overline{AB}$ y consideremos el $\angle n$, como se muestra en la Figura 31.4.

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, entonces $\angle C \cong \angle n$ por ser alternos internos entre paralelas.

Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, entonces $\angle A \cong \angle n$ por ser correspondientes entre paralelas.

Luego, $\angle A \cong \angle C$.

De manera similar podemos probar que $\angle B \cong \angle D$.

Notas 31.2

- La prueba del Teorema 31.2 también es inmediata de la prueba del Teorema 31.1, porque en ella se probó que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. Luego, $\angle A \cong \angle C$ por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes y como $\angle m \cong \angle m'$ y $\angle n \cong \angle n'$, entonces

$$\angle D \cong \angle m + \angle n' \cong \angle n + \angle m' \cong \angle B.$$

- El recíproco del teorema anterior también es válido. Esto es, todo cuadrilátero convexo con sus ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo.

- Dos ángulos consecutivos cualesquiera de un paralelogramo son suplementarios.

  En efecto, si consideramos nuevamente la Figura 31.4, tenemos que $\angle A \cong \angle n$ y como $\angle ABC$ es el suplemento del $\angle n$ entonces $\angle ABC$ es el suplemento del $\angle A$, esto es, $\angle A + \angle ABC = 180°$. De manera similar se hace la prueba para cualquier par de ángulos consecutivos del paralelogramo.

Ejemplo 31.1

Determinar cuáles cuadriláteros de la Figura 31.5 no pueden ser paralelogramos.

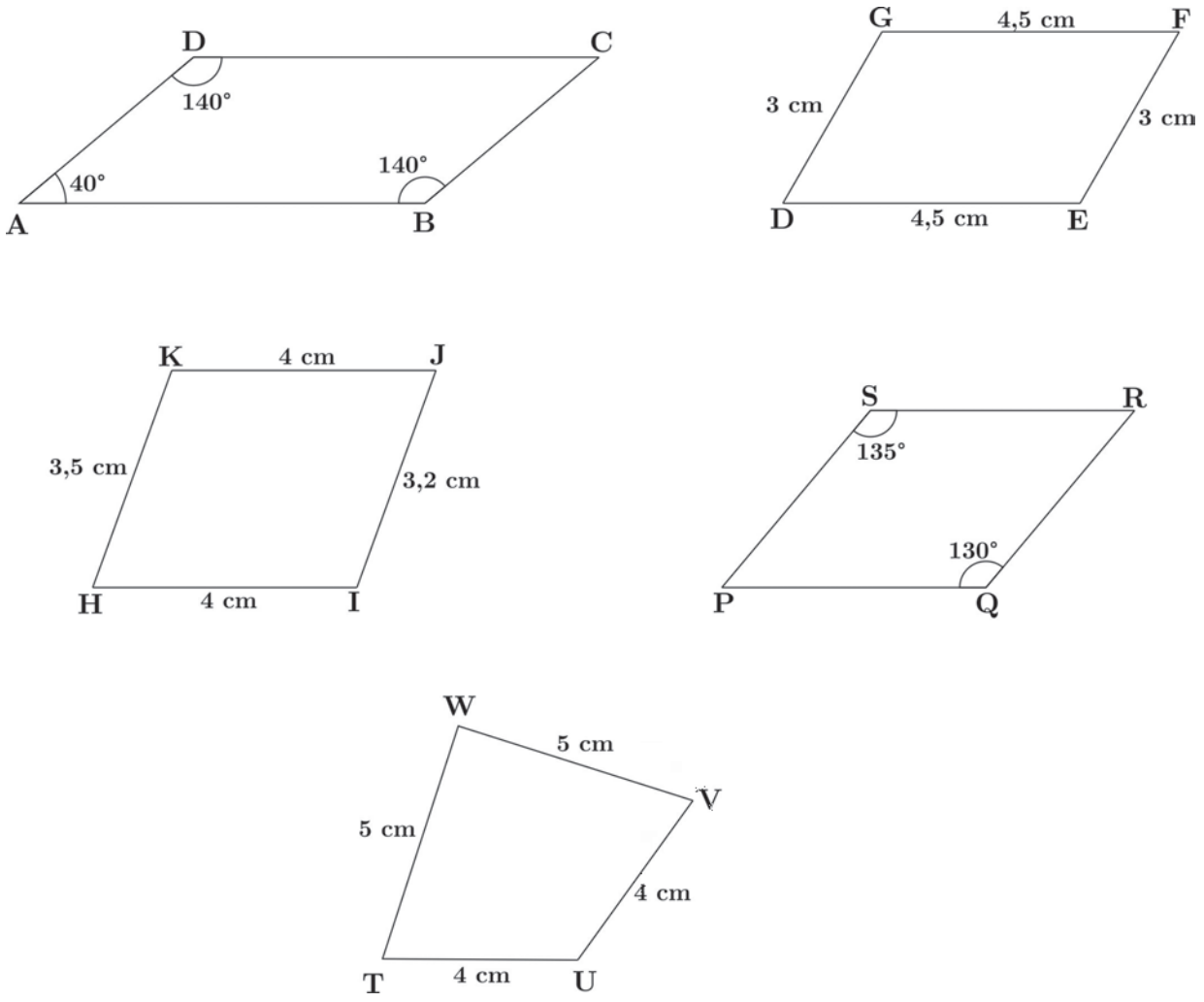


Figura 31.5

Solución

- Cuadrilátero $ABCD$:

  Como la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°, entonces $\angle C = 360° - (40° + 140° + 140°) = 40°$.

Luego, $ABCD$ es un cuadrilátero convexo con sus ángulos opuestos congruentes y por lo tanto es un paralelogramo.

- Cuadrilátero $DEFG$:

  Como los lados opuestos del cuadrilátero $DEFG$ son congruentes dos a dos entonces $DEFG$ es un paralelogramo.

- Cuadrilátero $HIJK$:

  Como los lados opuestos $\overline{IJ}$ y $\overline{HK}$ no son congruentes, entonces el cuadrilátero $HIJK$ no puede ser un paralelogramo.

- Cuadrilátero $PQRS$:

  Como los ángulos opuestos $\angle Q$ y $\angle S$ no son congruentes, el cuadrilátero $PQRS$ no puede ser un paralelogramo.

- Cuadrilátero $TUVW$:

  Como los lados opuestos $\overline{TW}$ y $\overline{UV}$ no son congruentes, el cuadrilátero $TUVW$ no puede ser un paralelogramo.

  Observamos en este caso que hay parejas de lados congruentes pero no son parejas de lados opuestos.

Ejemplo 31.2

En el paralelogramo $ABCD$ de la Figura 31.6, hallar:

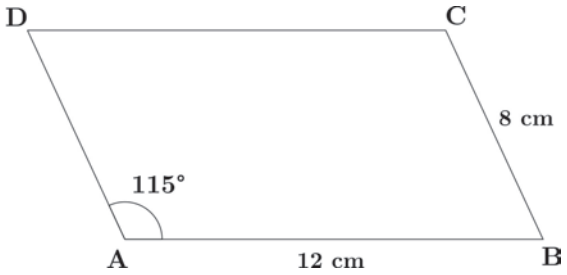


Figura 31.6

1. La medida de los lados.
2. La medida de los ángulos.

Solución

1. Como $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, entonces

$$\overline{DC} = 12\,cm.$$

   Como $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo, entonces

$$\overline{AD} = 8\,cm.$$

   Luego, las medidas de los lados del paralelogramo son:

$$\overline{AB} = 12\,cm,\ \overline{BC} = 8\,cm,\ \overline{DC} = 12\,cm \text{ y } \overline{AD} = 8\,cm.$$

2. Como $\angle A \cong \angle C$ por ser ángulos opuestos de un paralelogramo, entonces

$$\angle C = 115°.$$

Como los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios, entonces $\angle A + \angle B = 180°$ y así

$$\begin{aligned}\angle B &= 180° - \angle A \\ &= 180° - 115° \\ &= 65°.\end{aligned}$$

Como $\angle B \cong \angle D$ por ser ángulos opuestos de un paralelogramo, entonces

$$\angle D = 65°.$$

Luego, las medidas de los ángulos del paralelogramo son:

$$\angle A = 115°,\ \angle B = 65°,\ \angle C = 115° \text{ y } \angle D = 65°.$$

Ejercicios propuestos

1. Con base en la información suministrada en la Figura 31.7, si $ABCD$ es un paralelogramo, hallar la medida de los siguientes ángulos: $\angle BCD$, $\angle BOA$, $\angle BAD$, $\angle BOC$, $\angle BDA$ y $\angle DBA$.

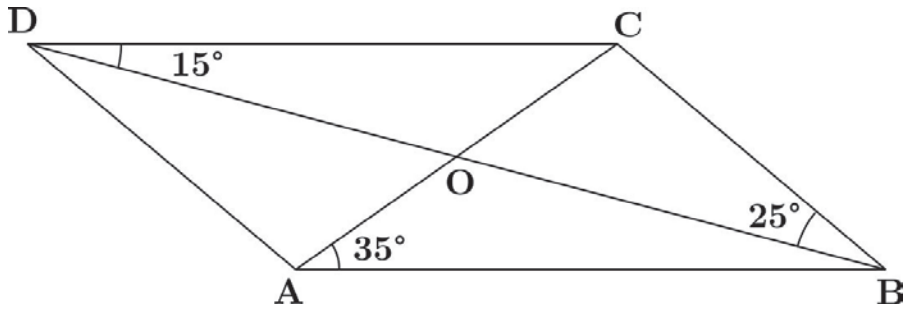


Figura 31.7

2. Consideremos la Figura 31.8 con $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $\overline{SY} \parallel \overline{RQ}$ y $\overline{PS} \parallel \overline{TR}$. Hallar la medida de los siguientes ángulos: $\angle SOT$, $\angle PSR$, $\angle RTQ$ y $\angle SYQ$.

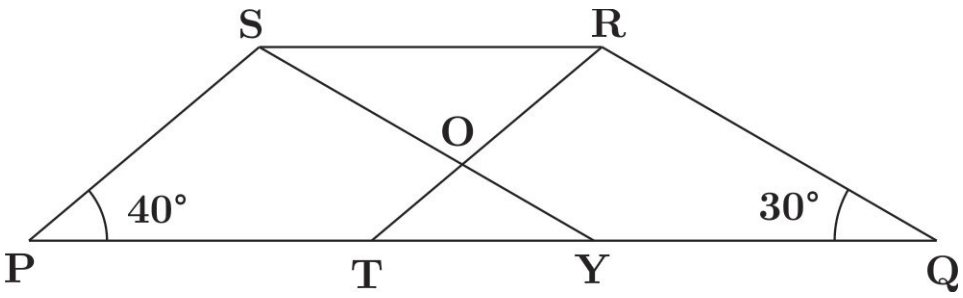


Figura 31.8

3. Probar que todo cuadrilátero convexo con dos lados opuestos congruentes y paralelos es un paralelogramo.

Respuestas

1. $\angle BCD = 140°$, $\angle BOA = 130°$, $\angle BAD = 140°$, $\angle BOC = 50°$, $\angle BDA = 25°$ y $\angle DBA = 15°$.
2. $\angle SOT = 70°$, $\angle PSR = 140°$, $\angle RTQ = 40°$ y $\angle SYQ = 150°$.
3. Ayuda: dibujar el cuadrilátero con las condiciones dadas, trazar una de sus diagonales y probar la congruencia de los triángulos que resultan.

Lección 32

Otras propiedades de los paralelogramos

En esta lección veremos otras propiedades de los paralelogramos, en este caso, las relacionadas con sus diagonales. Además aprenderemos a construir un paralelogramo cuando tenemos información sobre sus diagonales.

Teorema 32.1 - *Diagonales de un paralelogramo*

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, es decir se bisecan.

Prueba

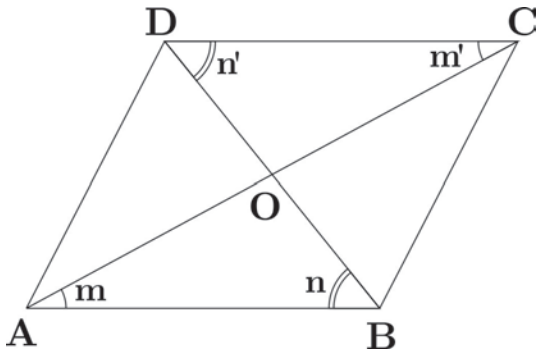


Figura 32.1

Sea $ABCD$ un paralelogramo,

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales que se cortan en el punto O.

Debemos probar que

$$\overline{OA} \cong \overline{OC} \ \ y \ \ \overline{OB} \cong \overline{OD}.$$

Consideremos los ángulos m, n, m' y n' de la Figura 32.1.

Como

$\angle m \cong \angle m'$ por ser alternos internos entre paralelas,

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ por ser lados opuestos del paralelogramo y

$\angle n \cong \angle n'$ por ser alternos internos entre paralelas,

entonces

$\triangle OAB \cong \triangle OCD$, por el criterio de congruencia A-L-A.

Luego,

$$\overline{OA} \cong \overline{OC} \ \text{ y } \ \overline{OB} \cong \overline{OD}$$

por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes y por tanto, O es el punto medio de las dos diagonales.

Notas 32.1

- El recíproco del teorema anterior también es válido. Esto es, si las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en su punto medio entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- De la definición de paralelogramo y de todos los resultados anteriores podemos concluir que si un cuadrilátero convexo tiene una de las siguientes propiedades es un paralelogramo y por lo tanto cumple las demás propiedades:
  1. Lados opuestos paralelos dos a dos.
  2. Lados opuestos congruentes dos a dos.
  3. Un par de lados opuestos congruentes y paralelos.
  4. Ángulos opuestos congruentes dos a dos.
  5. Las diagonales se bisecan.

Ejemplo 32.1

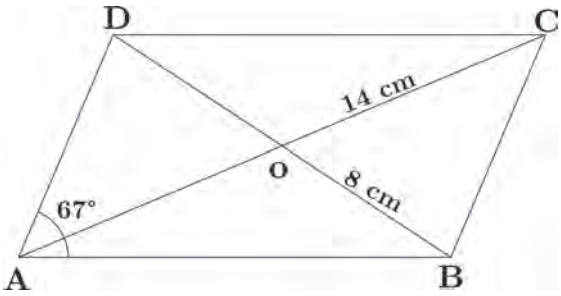


Figura 32.2

En el paralelogramo $ABCD$ de la Figura 32.2, hallar la medida de todos sus ángulos y de las diagonales.

Solución

Hallemos primero la medida de los ángulos.

Como $\angle C \cong \angle A$ por ser ángulos opuestos de un paralelogramo, entonces $\angle C = 67°$.

Como $\angle A + \angle B = 180°$ porque los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios, entonces $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 67° = 113°$.

Como $\angle D \cong \angle B$ por ser ángulos opuestos de un paralelogramo, entonces $\angle D = 113°$.

Hallemos ahora la medida de las diagonales.

Como las diagonales de un paralelogramo se bisecan entonces:

$\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y así $\overline{AO} = 14\,cm$ y $\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 14 + 14 = 28\,cm$ y

$\overline{BO} \cong \overline{OD}$ y así $\overline{OD} = 8\,cm$ y $\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 8 + 8 = 16\,cm$.

Por tanto, los ángulos del paralelogramo son

$$\angle A = 67° \ , \ \angle B = 113° \ , \ \angle C = 67° \ \text{ y } \ \angle D = 113°$$

y sus diagonales miden

$$\overline{AC} = 28 \text{ cm y } \overline{BD} = 16 \text{ cm.}$$

Ejemplo 32.2

En cada uno de los paralelogramos de las Figuras 32.3 y 32.4, hallar x y y.

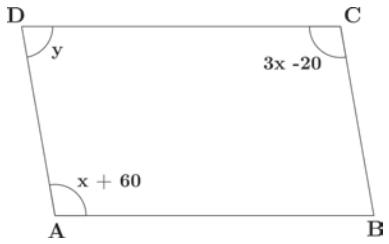


Figura 32.3

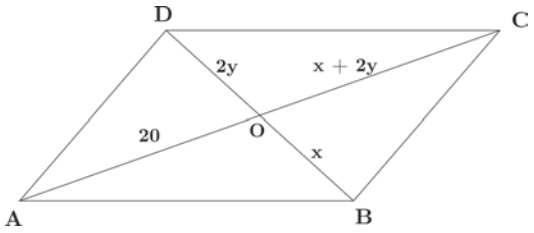


Figura 32.4

Solución

1. En la Figura 32.3, como los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, entonces $\angle A \cong \angle C$ y así

   $$x + 60 = 3x - 20.$$

   Resolviendo esta ecuación para x obtenemos $x = 40$.

   Como dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios, entonces $\angle A + \angle D = 180°$ y así $\angle D = 180° - \angle A$.

   Como $\angle A = x + 60 = 40 + 60 = 100°$, entonces $\angle D = 180° - 100° = 80°$ y como $\angle D = y$, entonces $y = 80$.

   Luego, $x = 40$ y $y = 80$.

2. En la Figura 32.4, como las diagonales de un paralelogramo se bisecan, es decir, se cortan en sus puntos medios, entonces

   $$x = 2y \tag{32.1}$$

   y

   $$x + 2y = 20. \tag{32.2}$$

   Reemplazando 32.1 en 32.2 tenemos

   $$2y + 2y = 20$$
   $$4y = 20$$
   $$y = 5.$$

   Sustituyendo el valor de y en 32.1 tenemos $x = 2(5) = 10$. Por tanto, $x = 10$ y $y = 5$.

Ejemplo 32.3

En el paralelogramo $MNPQ$ de la Figura 32.5, hallar la medida de $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$.

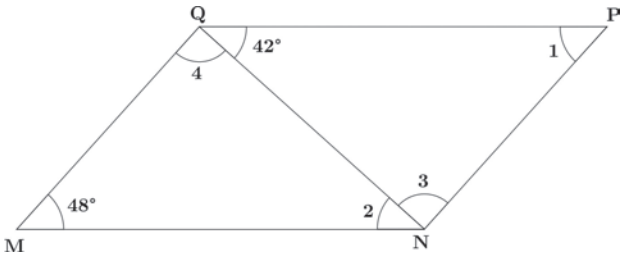


Figura 32.5

Solución

Como $\angle M \cong \angle 1$ por ser ángulos opuestos de un paralelogramo, entonces $\angle 1 = 48°$.

Como $\angle PQN \cong \angle 2$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 2 = 42°$.

Como $\angle 1 + \angle 3 + \angle PQN = 180°$ por ser los ángulos interiores del $\triangle PQN$, entonces

$$\begin{aligned} \angle 3 &= 180° - \angle 1 - \angle PQN \\ &= 180° - 48° - 42° \\ &= 90°. \end{aligned}$$

Como $\angle 3 \cong \angle 4$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 4 = 90°$.

Luego, los ángulos pedidos son $\angle 1 = 48°$, $\angle 2 = 42°$, $\angle 3 = 90°$ y $\angle 4 = 90°$.

Ejemplo 32.4

Consideremos el paralelogramo $ABCD$ de la Figura 32.6.

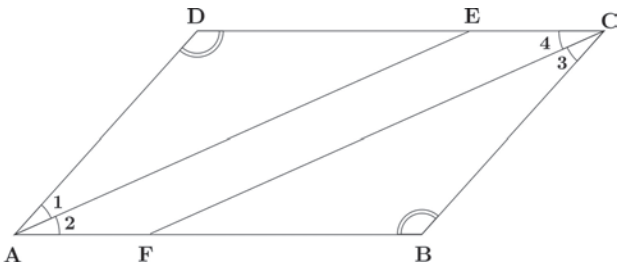


Figura 32.6

Si $\overrightarrow{AE}$ es bisectriz del $\angle A$ y $\overrightarrow{CF}$ es bisectriz del $\angle C$, probar que

$$\overrightarrow{AE} \cong \overrightarrow{CF}.$$

Solución

Como $\angle A \cong \angle C$ por ser ángulos opuestos del paralelogramo y como $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ son bisectrices de $\angle A$ y $\angle C$ respectivamente, entonces $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.

Además, como

$\overline{BC} \cong \overline{AD}$ por ser lados opuestos del paralelogramo y

$\angle B \cong \angle D$ por ser ángulos opuestos del paralelogramo,

entonces

$\triangle ADE \cong \triangle CBF$ por el criterio de congruencia A-L-A.

Luego, $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

¿Cómo construir un paralelogramo si nos dan información sobre las diagonales?

Consideremos dos casos:

Construcción 32.1

Construir un paralelogramo dado un lado y las dos diagonales

Tracemos un paralelogramo $ABCD$ dados el lado $\overline{AB}$ y las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de la Figura 32.7, de medidas a, d y d' respectivamente.

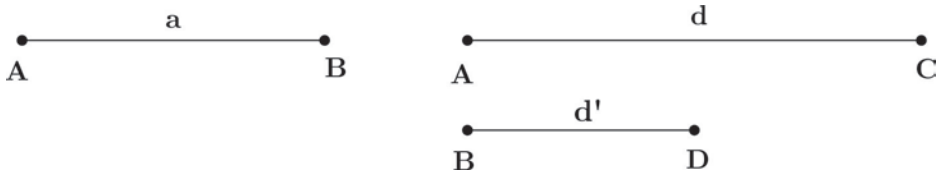
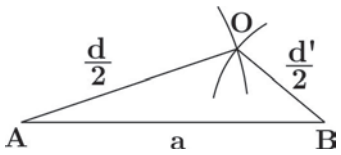


Figura 32.7

Si llamamos O el punto donde se intersecan las diagonales con el segmento de recta $\overline{AB}$ de medida a y con dos segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ cuyas medidas sean $d/2$ y $d'/2$ respectivamente, construimos el $\triangle ABO$, utilizando el procedimiento que vimos en una lección anterior.



A partir del punto O, prolongamos los lados $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ hasta tener la medida de las diagonales y sus extremos C y D serán los otros dos vértices del paralelogramo. Unimos C y D respectivamente con A y B y entre sí para obtener el paralelogramo pedido, como se muestra en la Figura 32.8.

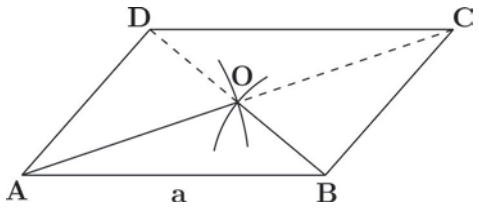


Figura 32.8

Construcción 32.2

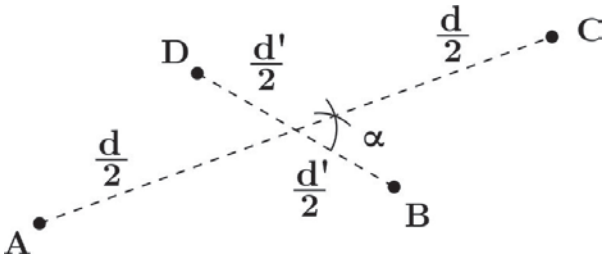
Construir un paralelogramo dadas las dos diagonales y uno de los ángulos que forman

Tracemos un paralelogramo $ABCD$ dadas las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ cuyas medidas son d y d' respectivamente y el $\angle\alpha$ que ellas forman, como se muestra en la Figura 32.9.

Figura 32.9

Trazamos un ángulo congruente con el $\angle\alpha$ dado, como vimos en una lección anterior.

Prolongamos los lados del ángulo en ambos sentidos y tomamos respectivamente sobre cada uno de ellos, y en cada sentido, la mitad de la medida de las diagonales.



Los extremos del segmento de medida d los llamamos A y C y los del segmento de medida d' los llamamos B y D. Unimos A, B, C y D en este orden para obtener el paralelogramo $ABCD$ pedido, como se muestra en la Figura 32.10.

.

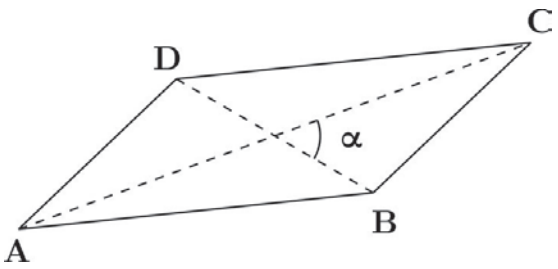


Figura 32.10

Notas 32.2

Teniendo en cuenta las propiedades de un paralelogramo y las construcciones geométricas que hemos realizado en lecciones anteriores, proponemos al lector hacer las siguientes construcciones:

- Construir un paralelogramo dados dos lados y el ángulo formado por ellos. ¿Qué condición deben cumplir el ángulo dado para que esta construcción sea posible?
- Construir un paralelogramo dado un lado y los ángulo adyacentes a él. ¿Qué condición deben cumplir los dos ángulos para que esta construcción sea posible?
- Construir un paralelogramo dados dos lados consecutivos y una diagonal. ¿Qué condición deben cumplir los tres segmentos dados para que esta construcción sea posible?

- Construir un paralelogramo dados tres puntos no colineales.

Ejercicios propuestos

1. Probar que las dos diagonales de un paralelogramo lo dividen en dos pares de triángulos congruentes entre sí.
2. En el $\triangle ABC$ de la Figura 32.11, la mediana $\overline{BM}$, trazada desde el vértice B, se prolonga hasta el punto E de tal manera que $\overline{ME} \cong \overline{MB}$. Probar que si unimos el punto A con el punto E, el cuadrilátero $ABCE$ que resulta es un paralelogramo.

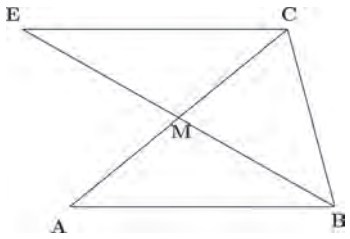


Figura 32.11

3. Construir un paralelogramo que satisfaga las condiciones dadas en cada literal:
   (a) La medida de uno de sus lados es 4 cm y sus diagonales miden 9 cm y 7 cm.
   (b) La medida de sus diagonales es 7 cm y 5 cm y forman un ángulo de 55°.
   (c) La medida de dos lados consecutivos es 4 cm y $3,5$ cm y la medida de una diagonal es $4,5$ cm.

Respuestas

1. Ayuda: trazar el paralelogramo con sus diagonales y utilizar criterios de congruencia.
2. Ayuda: utilizar el recíproco del Teorema 32.1. Otra forma de hacer el ejercicio es: probar que dos lados opuestos del cuadrilátero $ABCE$ son paralelos y congruentes. Para ello puede probar que $\triangle AME \cong \triangle CMB$ y utilizar las propiedades de los ángulos formados por dos rectas cortadas por una secante.
3.

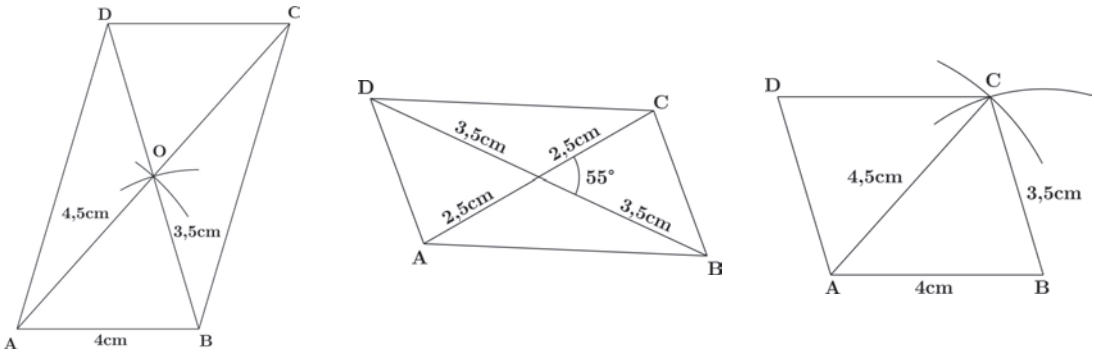


Figura 32.12

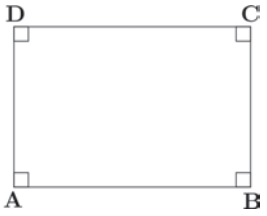
Lección 33

Algunos paralelogramos especiales

En esta lección veremos el rectángulo, el rombo y el cuadrado que son tipos especiales de paralelogramos y para cada uno presentaremos algunas de sus propiedades.

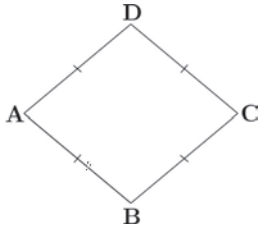
Algunos paralelogramos especiales son:

- **Rectángulos**: si tienen un ángulo recto y por consiguiente sus cuatro ángulos rectos.
- **Rombos**: si tienen los cuatro lados congruentes.
- **Cuadrados**: si tienen los cuatro lados congruentes y los cuatro ángulos congruentes.



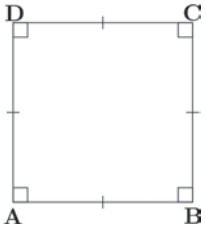
Rectángulo $ABCD$

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D$



Rombo $ABCD$

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$



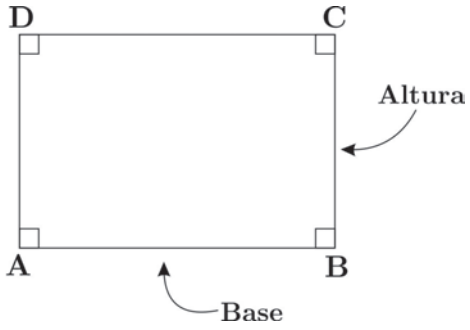
Cuadrado $ABCD$

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

$\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D$

Figura 33.1

Si en un rectángulo uno cualquiera de los lados se escoge como base, el lado consecutivo es la altura. Nos referiremos a la base y a la altura como a las **dimensiones** del rectángulo.



Rectángulo $ABCD$

Base $\overline{AB}$

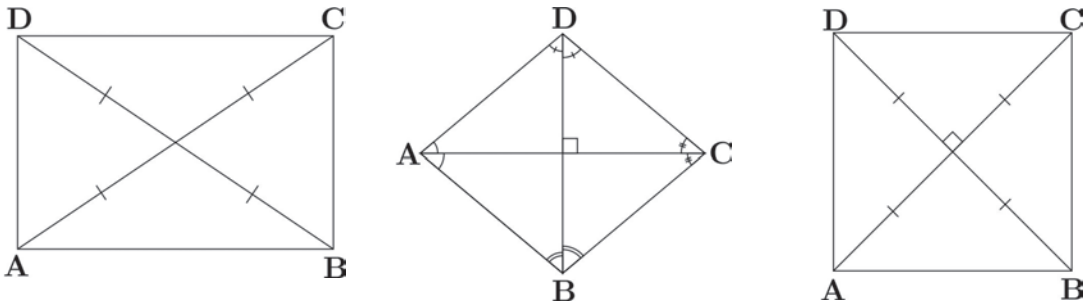
Altura $\overline{BC}$

Figura 33.2

El rombo y el cuadrado son polígonos equiláteros y el cuadrado es a la vez rectángulo y rombo.

Además de cumplir las propiedades generales de los paralelogramos, el rectángulo, el rombo y el cuadrado tienen las siguientes propiedades:

1. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
2. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.
3. Las diagonales de un rombo son bisectrices de sus ángulos interiores.
4. En un cuadrado, las diagonales son congruentes, se bisecan, son perpendiculares entre sí y son bisectrices de sus ángulos interiores.



Rectángulo $ABCD$
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Rombo $ABCD$
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Cuadrado $ABCD$
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Figura 33.3

La Propiedad 4. es consecuencia inmediata de las Propiedades 1., 2. y 3. porque un cuadrado es a la vez rectángulo y rombo. En los siguientes teoremas probaremos las Propiedades 1., 2. y 3.

Teorema 33.1

Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Prueba

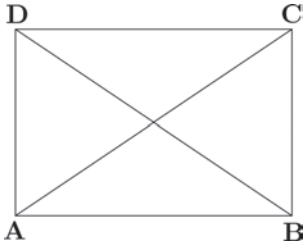


Figura 33.4

Sea $ABCD$ un rectángulo,
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales.
Debemos probar que:

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}.$$

Como

$\angle ABC$ y $\angle BAD$ son rectos por ser ángulos de un rectángulo,

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un rectángulo,

entonces

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$, por ser triángulos rectángulos con sus catetos respectivamente congruentes.

Luego, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Ejemplo 33.1

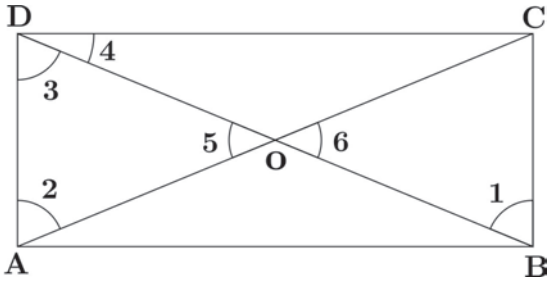


Figura 33.5

En el rectángulo $ABCD$ de la Figura 33.5, si $\angle 1 = 70°$, hallar la medida de los ángulos 2 a 6 .

Solución

Como $\angle 1 \cong \angle 3$ por ser alternos internos entre paralelas, entonces $\angle 3 = 70°$.

Como $\angle D = 90°$ por ser un ángulo interior de un rectángulo y como $\angle D = \angle 3 + \angle 4$ entonces

$$\begin{aligned} \angle 4 &= \angle D - \angle 3 \\ &= 90° - 70° \\ &= 20°. \end{aligned}$$

Como $\overline{AO} \cong \overline{DO}$ porque las diagonales de un rectángulo son congruentes y se bisecan entonces $\angle 3 \cong \angle 2$, por ser ángulos opuestos a lados congruentes. Luego, $\angle 2 = 70°$.

Como $\angle 2 + \angle 5 + \angle 3 = 180°$, por ser la suma de los ángulos interiores del $\triangle AOD$ entonces

$$\begin{aligned} \angle 5 &= 180° - \angle 2 - \angle 3 \\ &= 180° - 70° - 70° \\ &= 40°. \end{aligned}$$

Como $\angle 6 \cong \angle 5$ por ser opuestos por el vértice, entonces $\angle 6 = 40°$.

Por tanto, los ángulos pedidos son

$$\angle 2 = 70°\,,\ \angle 3 = 70°\,,\ \angle 4 = 20°\,,\ \angle 5 = 40°\ \text{ y }\ \angle 6 = 40°.$$

Ejemplo 33.2

En el rectángulo $ABCD$ de la Figura 33.6, hallar:

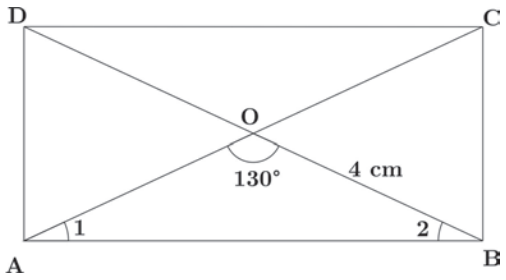


Figura 33.6

1. La medida de las diagonales del rectángulo.
2. La medida de $\angle 1$ y $\angle 2$.

Solución

Como en un rectángulo las diagonales son congruentes y se bisecan, entonces

$$\overline{OA} \cong \overline{OC} \cong \overline{OB} \cong \overline{OD}.$$

1. Como $\overline{OB} = 4\,cm$, entonces

   $$\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4 + 4 = 8\,cm$$

   y por lo tanto $\overline{AC} = 8\,cm$.

   Luego, cada diagonal del rectángulo mide $8\,cm$.

2. Como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, el $\triangle AOB$ es isósceles y por tanto

   $$\angle 1 \cong \angle 2$$

   por ser los ángulos opuestos a los lados congruentes.

   Como $\angle 1 + \angle 2 + \angle AOB = 180°$ por ser la suma de los ángulos interiores del $\triangle AOB$, entonces

   $$\begin{aligned} 2(\angle 1) &= 180° - \angle AOB \\ \angle 1 &= \frac{1}{2}(180° - 130°) \\ &= \frac{1}{2}(50°) \\ &= 25°. \end{aligned}$$

   Luego, $\angle 1 = 25°$ y $\angle 2 = 25°$.

Teorema 33.2

Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y son bisectrices de sus ángulos interiores.

Prueba

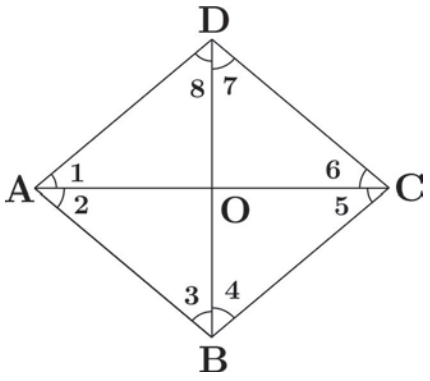


Figura 33.7

Sea $ABCD$ un rombo,
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales que se cortan en el punto O.
Debemos probar que:
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$,
$\overline{AC}$ es bisectriz de $\angle A$ y de $\angle C$ y
$\overline{BD}$ es bisectriz de $\angle B$ y de $\angle D$.

Consideremos los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 5$, $\angle 6$ que forma la diagonal $\overline{AC}$ en los vértices A y C del rombo y los ángulos $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 7$, $\angle 8$ que forma la diagonal $\overline{BD}$ en los vértices B y D, como se muestra en la Figura 33.7.

Como

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ por ser $ABCD$ un rombo,

$\overline{OA} \cong \overline{OC}$ y $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ porque O es el punto medio de las diagonales por ser $ABCD$ un paralelogramo,

entonces

$\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COD \cong \triangle DOA$ por el criterio de congruencia L-L-L.

Por tanto, los cuatro ángulos consecutivos con vértice en O que forman las diagonales, son congruentes y por consiguiente son ángulos rectos. Luego, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Como $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 5 \cong \angle 6$, por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes, entonces $\overline{AC}$ es bisectriz de $\angle A$ y de $\angle C$.

Como $\angle 3 \cong \angle 4$ y $\angle 7 \cong \angle 8$, por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes, entonces $\overline{BD}$ es bisectriz de $\angle B$ y de $\angle D$.

Ejemplo 33.3

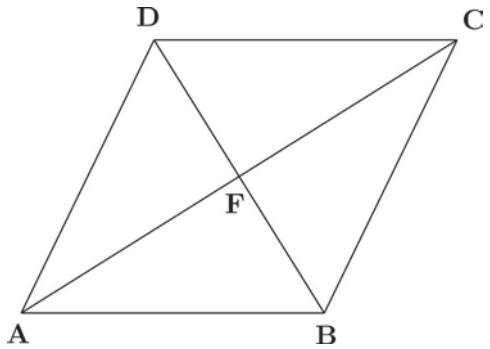


Figura 33.8

En el rombo $ABCD$ de la Figura 33.8, sus diagonales se cortan en el punto F.
Si $\angle AFB = 4x+10$ y $\angle DCB = 3x+4$, hallar $\angle ADC$.

Solución

Como las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, por Teorema 33.2, entonces $\angle AFB = 90°$ y como $\angle AFB = 4x + 10$ entonces

$$4x + 10 = 90.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 20$.

Como $\angle DCB = 3x + 4$, sustituyendo x obtenemos $\angle DCB = 3(20) + 4 = 64°$.

Como $\angle ADC + \angle DCB = 180°$ porque los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios, entonces $\angle ADC = 180° - \angle DCB = 180° - 64° = 116°$.

Notas 33.1

El recíproco de cada uno de los teoremas anteriores también es válido. Esto es,

- Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo.
- Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares entre sí, el paralelogramo es un rombo.
- Si las diagonales de un paralelogramo son bisectrices de sus ángulos interiores, el paralelogramo es un rombo.

Ejemplo 33.4

Construir un rombo sabiendo que su lado mide 5 cm y forma con una diagonal un ángulo de 35°.

Solución

Tracemos un rombo $ABCD$ dados el lado $\overline{AB}$ cuya medida es 5 cm y el $\angle\alpha = 35°$ que $\overline{AB}$ forma con la diagonal $\overline{AC}$.

Tracemos el segmento de recta $\overline{AB}$ de medida 5 cm y con vértice en A y con lado $\overline{AB}$ trazamos el $\angle\alpha$, como se muestra en la Figura 33.9. Sobre el otro lado del ángulo trazado está la diagonal $\overline{AC}$, cuya medida no conocemos.

Como, por Teorema 33.2, la diagonal $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle A$ entonces el ángulo que ésta forma con el lado $\overline{AD}$ también tiene una medida de 35°.

Con vértice en A y a partir de la semirrecta que contiene a la diagonal trazamos un ángulo de 35°, cuyo segundo lado es la semirrecta sobre la que está el lado $\overline{AD}$ del rombo. Como los lados de un rombo son congruentes, sobre esta semirrecta y a partir de A tomamos una medida de 5 cm y así obtenemos el lado $\overline{AD}$ del rombo, como se muestra en la Figura 33.10.

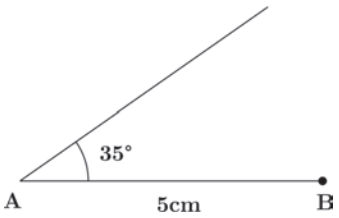


Figura 33.9

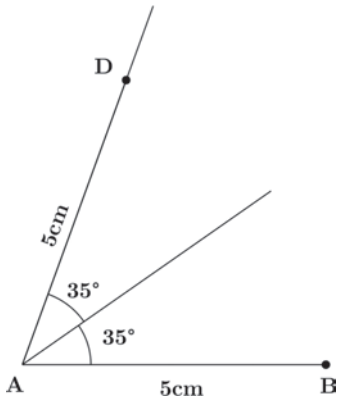


Figura 33.10

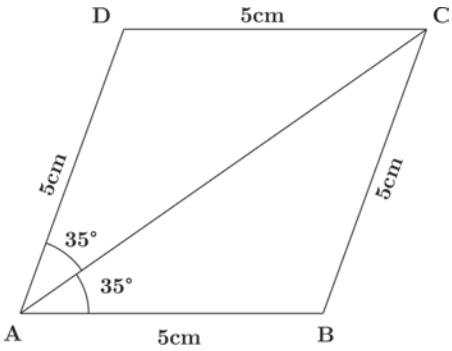


Figura 33.11

A partir de D trazamos una recta paralela a $\overline{AB}$ y el punto donde corta a la semirrecta que contiene la diagonal corresponde al vértice C del rombo. Unimos C con B y así obtenemos el rombo $ABCD$ pedido, como se muestra en la Figura 33.11.

Ejercicios propuestos

1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Si dos de sus lados paralelos son $\overline{AB} = 4x-5$ y $\overline{CD} = 2x+23$, y sus diagonales son $\overline{AC} = 3x-2$ y $\overline{BD} = 2x+12$, probar que $ABCD$ es un rectángulo.

2. En la Figura 33.12, $ABCD$ es un paralelogramo y $DBCE$ es un rectángulo. Probar que $\triangle EBA$ es isósceles.

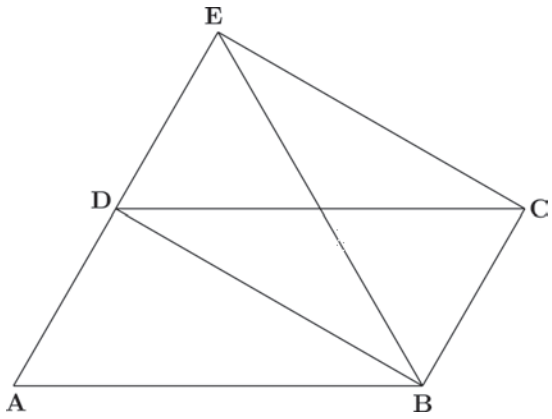


Figura 33.12

3. Construir un rombo sabiendo que su lado mide 45 mm y una diagonal mide 6 cm.

Respuestas

1. Ayuda: recordar propiedades del paralelogramo y el recíproco del Teorema 33.1.

2. Ayuda: recordar propiedades del paralelogramo y del rectángulo.

3.

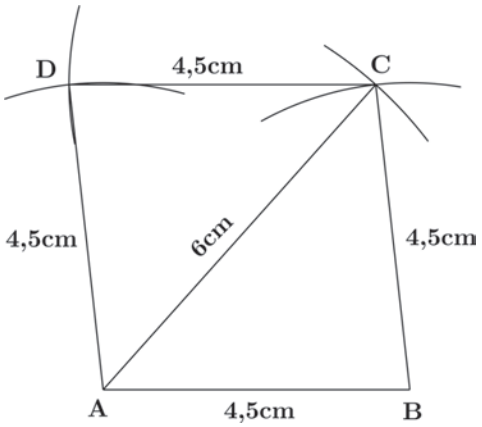


Figura 33.13

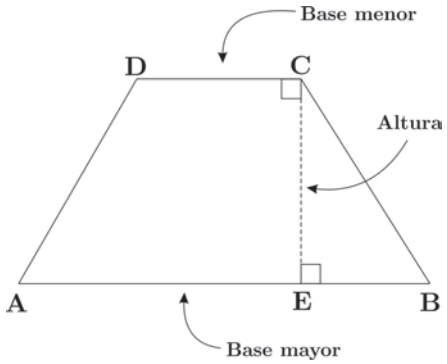
Lección 34

Trapecio

En esta lección veremos un cuadrilátero que sólo tiene dos lados opuestos paralelos, llamado trapecio y presentaremos algunas de sus propiedades.

Un **trapecio** es un cuadrilátero que sólo tiene dos lados opuestos paralelos.

Los lados paralelos de un trapecio se llaman **bases**, una **base mayor** y la otra **base menor**, y al segmento de recta perpendicular a las bases y cuyos puntos extremos están sobre ellas se le denomina **altura** del trapecio.



Trapecio $ABCD$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{AB}$ base mayor

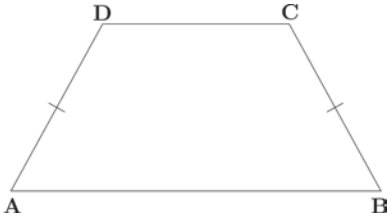
$\overline{DC}$ base menor

$\overline{EC}$ altura

Figura 34.1

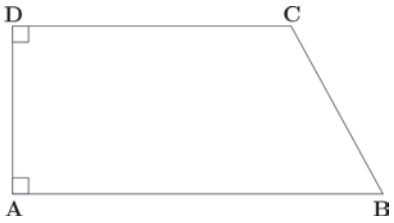
Si los lados no paralelos de un trapecio son congruentes, recibe el nombre de **trapecio isósceles**.

Si el trapecio tiene dos ángulos rectos se denomina **trapecio rectángulo**.



Trapecio isósceles $ABCD$

$\overline{BC} \cong \overline{AD}$



Trapecio rectángulo $ABCD$

$\angle A = 90°$, $\angle D = 90°$

Figura 34.2

Ejemplo 34.1

En el trapecio $ABCD$ de la Figura 34.3, con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, hallar:

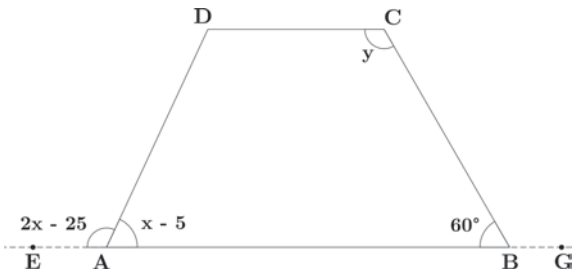


Figura 34.3

1. El valor de x y y si los puntos E, A, B y G son colineales.
2. La medida de los ángulos interiores del trapecio.

Solución

1. Como $\angle DAE$ y $\angle DAB$ son suplementarios, entonces $\angle DAE + \angle DAB = 180°$.

   Reemplazando $\angle DAE$ y $\angle DAB$ por su medida obtenemos la ecuación

   $$(2x - 25) + (x - 5) = 180°.$$

   Resolvamos esta ecuación para x:

   $$\begin{aligned} 2x - 25 + x - 5 &= 180 \\ 3x - 30 &= 180 \\ 3x &= 210 \\ x &= 70. \end{aligned}$$

   Como $\angle C \cong \angle CBG$ por ser alternos internos entre paralelas y como $\angle C = y$, entonces $\angle CBG = y$.

   Como $\angle CBA$ y $\angle CBG$ son suplementarios, entonces $\angle CBA + \angle CBG = 180°$.

   Reemplazando $\angle CBA$ y $\angle CBG$ por su medida obtenemos la ecuación $60 + y = 180$.

   Resolviendo esta ecuación para y obtenemos $y = 120$.

   Luego, $x = 70$ y $y = 120$.

2. Los ángulos interiores del trapecio son:

   $$\angle DAB = x - 5 = 70 - 5 = 65°.$$

   $$\angle CBA = 60°$$

   $$\angle C = y = 120°.$$

   Como $\angle DAB + \angle CBA + \angle C + \angle D = 360°$ por ser la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero entonces

   $$\begin{aligned} \angle D &= 360° - \angle DAB - \angle CBA - \angle C \\ &= 360° - 65° - 60° - 120° \\ &= 115°. \end{aligned}$$

Ejemplo 34.2

Sea $ABCD$ el trapecio isósceles de la Figura 34.4, con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

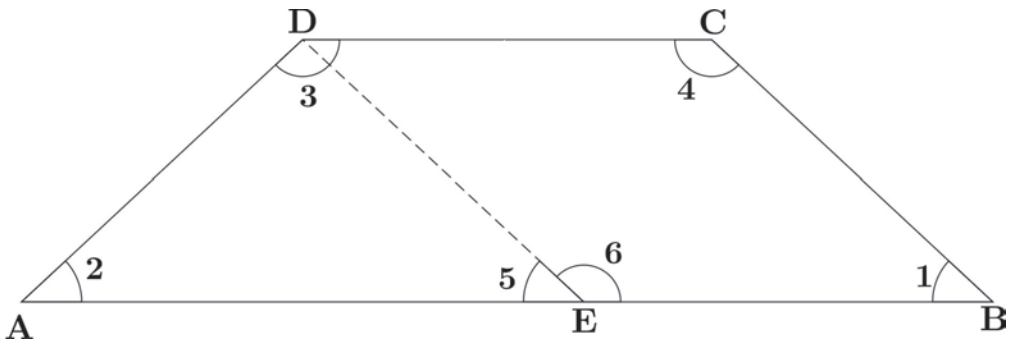


Figura 34.4

Si $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ y $\angle 1 = 43°$, hallar los demás ángulos interiores $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$ del trapecio.

Solución

Consideremos el $\angle 5$ y el $\angle 6$ que se muestran en la Figura 34.4.

Como $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ entonces $EBCD$ es un paralelogramo y por tanto $\overline{ED} \cong \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo.

Como $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ por ser los lados no paralelos del trapecio $ABCD$, que es isósceles, entonces $\overline{AD} \cong \overline{ED}$.

Luego, $\triangle AED$ es isósceles.

Como $\angle 1 \cong \angle 5$ por ser correspondientes entre paralelas, $\angle 5 = 43°$, y como $\angle 5 \cong \angle 2$ por ser los ángulos de la base del $\triangle AED$, entonces

$$\angle 2 = 43°.$$

Como $\angle 4 \cong \angle 6$ por ser ángulos opuestos del paralelogramo $EBCD$ y como $\angle 6 = 180° - \angle 5 = 180° - 43° = 137°$, entonces

$$\angle 4 = 137°.$$

Como $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$, por ser la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero entonces

$$\begin{aligned} \angle 3 &= 360° - \angle 1 - \angle 2 - \angle 4 \\ &= 360° - 43° - 43° - 137° \\ &= 137°. \end{aligned}$$

Luego, los ángulos interiores del trapecio $ABCD$ son

$$\angle 1 = 43°\,,\ \angle 2 = 43°\,,\ \angle 3 = 137° \text{ y } \angle 4 = 137°.$$

Veamos el siguiente teorema que usaremos para probar una propiedad importante del trapecio.

Teorema 34.1

Si por el punto medio de un lado de un triángulo trazamos una paralela a otro lado, entonces esta paralela pasa por el punto medio del tercer lado y su medida es igual a la mitad de la medida del lado del cual es paralelo.

Prueba

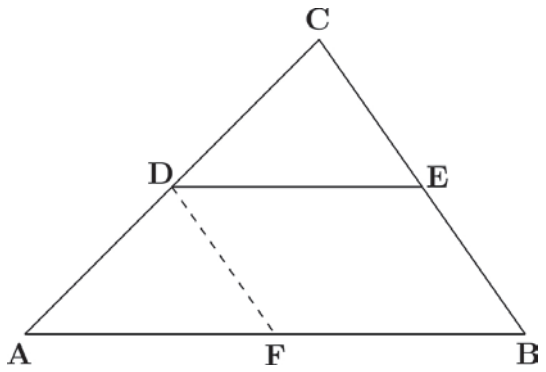


Figura 34.5

Sean ABC un triángulo cualquiera,
D el punto medio de $\overline{AC}$,
C, E y B puntos colineales y
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.
Debemos probar que
E es el punto medio de $\overline{BC}$ y que
$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Tracemos $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$, con A, F y B puntos colineales. Entonces, el cuadrilátero $FBED$ es un paralelogramo y por lo tanto

$$\overline{DE} \cong \overline{FB} \quad \text{y} \quad \overline{DF} \cong \overline{EB} \tag{34.1}$$

por ser lados opuestos del paralelogramo.

Ahora, como

$\angle DAF \cong \angle CDE$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

$\overline{AD} \cong \overline{DC}$ por ser D punto medio de $\overline{AC}$ y

$\angle ADF \cong \angle DCE$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

entonces

$\triangle ADF \cong \triangle DCE$, por criterio de congruencia A-L-A. Luego,

$$\overline{DE} \cong \overline{AF} \quad \text{y} \quad \overline{CE} \cong \overline{DF} \tag{34.2}$$

por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

De 34.2 y 34.1 tenemos que:

- $\overline{DE} \cong \overline{AF} \cong \overline{FB}$ y entonces $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.
- $\overline{CE} \cong \overline{DF} \cong \overline{EB}$ y entonces E es el punto medio de $\overline{BC}$.

Notas 34.1

El recíproco del Teorema 34.1 también es válido, esto es, el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su medida es la mitad de la medida de dicho lado.

Teorema 34.2

El segmento de recta paralelo a las bases de un trapecio que pasa por el punto medio de uno de sus lados no paralelos, pasa también por el punto medio del otro lado no paralelo y su medida es igual a la semisuma de las medidas de las bases.

Prueba

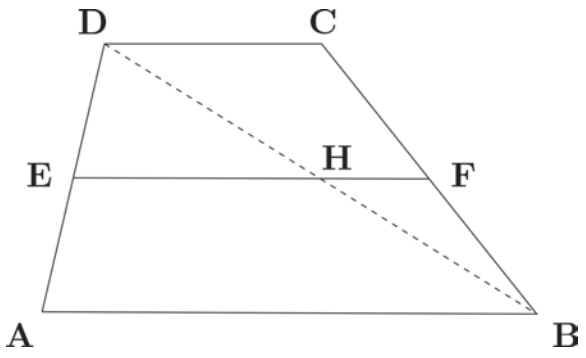


Figura 34.6

Sea $ABCD$ un trapecio,
con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$,
E punto medio de $\overline{AD}$ y
$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.
Debemos probar que:
F es el punto medio de $\overline{BC}$ y
$\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$.

Tracemos la diagonal $\overline{BD}$ y sea H el punto donde $\overline{BD}$ interseca a $\overline{EF}$.

Consideremos el $\triangle ABD$: Como $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$ y E es el punto medio de $\overline{AD}$, por Teorema 34.1, H es el punto medio de $\overline{BD}$ y

$$\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AB} \tag{34.3}$$

Consideremos el $\triangle BCD$: Como $\overline{HF} \parallel \overline{DC}$ y H es el punto medio de $\overline{BD}$, por Teorema 34.1, F es el punto medio de $\overline{BC}$ y

$$\overline{HF} = \frac{1}{2}\overline{DC} \tag{34.4}$$

De las ecuaciones 34.3 y 34.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{EH} + \overline{HF} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right). \end{aligned}$$

Notas 34.2

El recíproco del Teorema 34.2 también es válido, esto es, el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases y su medida es igual a la semisuma de las medidas de las bases.

Ejemplo 34.3

Consideremos el trapecio $ABCD$ de la Figura 34.7, con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

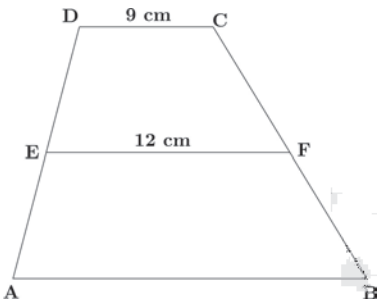


Figura 34.7

Si E y F son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, hallar la medida de la base mayor del trapecio.

Solución

Como E y F son los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio, entonces $\overline{EF}$ es paralelo a las bases y por el Teorema 34.2

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right).$$

Luego,

$$2\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{DC}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= 2\overline{EF} - \overline{DC} \\ &= 2(12) - 9 \\ &= 24 - 9 \\ &= 15.\end{aligned}$$

Por tanto, la base mayor del trapecio mide $15\,cm$.

Notas 34.3

Los siguientes resultados, cuyas pruebas se dejan como ejercicios, también son válidos.

1. En un trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una misma base son congruentes.

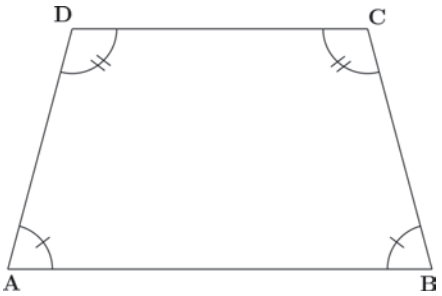


Figura 34.8

Sea $ABCD$ un trapecio isósceles, con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Entonces
$\angle A \cong \angle B$ y $\angle D \cong \angle C$.

2. Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.

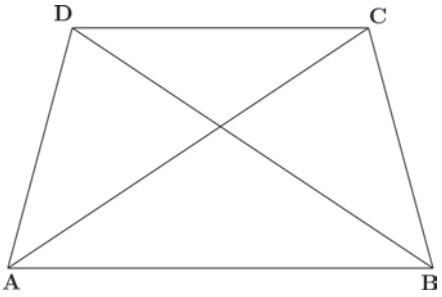


Figura 34.9

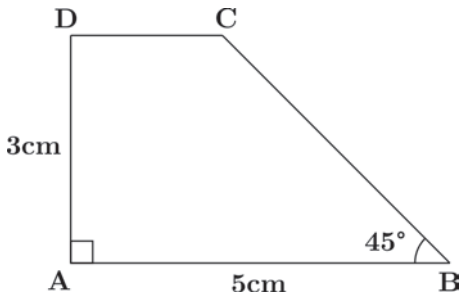
Sea $ABCD$ un trapecio isósceles,
con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$,
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales.
Entonces
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Ejercicios propuestos

1. Probar que en un trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una misma base son congruentes.
2. Probar que las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.
3. Construir un trapecio rectángulo cuya base mayor mide 5 cm, su altura 3 cm y el ángulo agudo adyacente a la base mayor mide 45°.
4. Considerar un trapecio isósceles $ABCD$ con base mayor $\overline{AB}$ y base menor $\overline{DC}$.
   (a) Si el $\angle A$ adyacente a la base mayor mide 65°, ¿cuál es la medida de los demás ángulos interiores del trapecio?
   (b) Si la medida de la diagonal $\overline{AC}$ es 6 cm, ¿cuál es la medida de la diagonal $\overline{BD}$?
5. Probar que si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero $ABCD$ cualquiera se obtiene un paralelogramo.
6. ¿Qué se puede decir de la medida de los lados del paralelogramo resultante en el ejercicio anterior?

Respuestas

1. Ayuda: en la Figura 34.8, trazar $\overline{DM}$ y $\overline{CN}$ perpendiculares a la base $\overline{AB}$ y probar que $\triangle AMD \cong \triangle BNC$.
2. Ayuda: en la Figura 34.9, probar que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$.
3.



4. (a) $\angle B = 65°$, $\angle C = 115°$ y $\angle D = 115°$.

   (b) $\overline{BD} = 6\ cm$.

5. Ayuda: utilizar el recíproco del Teorema 34.1 y para ello trazar una de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.

6. Ayuda: utilizar el recíproco del Teorema 34.1.

Lección 35

Área y perímetro de polígonos

En esta lección veremos cómo calcular el perímetro y el área de algunos polígonos, en particular de rectángulos, cuadrados y paralelogramos.

¿Cómo hallar el perímetro de un polígono?

El **perímetro** de un polígono, que denotamos P, es la medida de la línea poligonal que lo limita.

Esto es, el perímetro de un polígono es la suma de las medidas de los lados del polígono.

Por ejemplo,

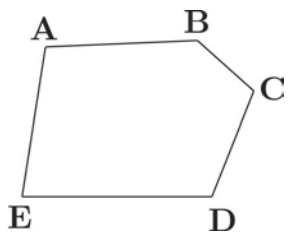


Figura 35.1

En el pentágono $ABCDE$ de la Figura 35.1, si $\overline{AB} = 2\,cm$, $\overline{BC} = 1\,cm$, $\overline{CD} = 1,5\,cm$, $\overline{DE} = 2,5\,cm$ y $\overline{EA} = 2\,cm$, su perímetro es

$$\begin{aligned} P &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} \\ &= 2 + 1 + 1,5 + 2,5 + 2 \\ &= 9\ cm. \end{aligned}$$

Cuando el polígono es regular y su lados tienen medida l, el perímetro es

$$P = n \cdot l$$

con n el número de lados del polígono.

Así, el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado l mide $3\,cm$ es $P = 3l = 3(3\,cm) = 9\,cm$. El perímetro de un octágono regular cuyo lado mide $1,5\,m$ es $P = 8(1,5\,m) = 12\,m$.

¿Cómo hallar el área de un polígono?

Área es la medida de una superficie.

Así como para medir un segmento usamos una unidad de medida, para hallar el área de figuras planas utilizamos como unidad de medida un cuadrado tal que la medida de su lado sea la unidad de medida de segmentos.

Si u es la unidad de medida de segmentos, la unidad de medida de una figura plana es un cuadrado de lado u, que llamamos **unidad cuadrada** o **unidad de área**, como se muestra en la Figura 35.2.

Unidad de medida de segmentos Unidad de medida de áreas

Figura 35.2

Para hallar el área de una figura plana, que denotamos A, debemos ver cuántas unidades cuadradas o partes de éstas "caben" en la figura.

Por ejemplo, en el rectángulo de la Figura 35.3 "caben" 12 unidades cuadradas. Luego, su área es $12\,u^2$.

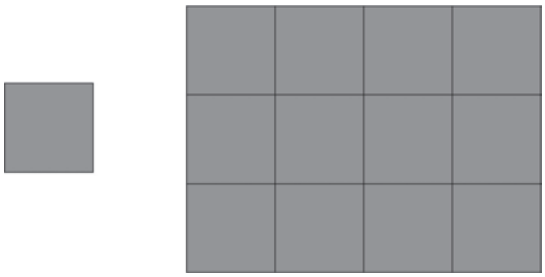


Figura 35.3

Si queremos hacer el mismo procedimiento con un triángulo, vemos que es difícil calcular las porciones de unidad que caben exactamente en el triángulo, como se observa en la Figura 35.4.

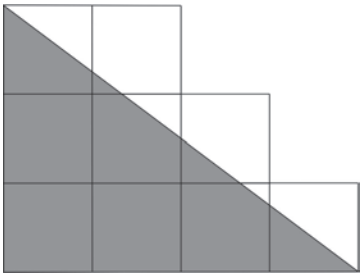


Figura 35.4

Por esto, la medida del área de figuras planas se halla de manera indirecta, para lo cual se miden algunos de los elementos de la figura y se realizan operaciones aritméticas entre los valores obtenidos, como veremos a continuación, y por ello decimos que "el área no se mide sino que se calcula".

Es importante tener en cuenta que para el cálculo de un área, las medidas deben ser con la misma unidad. Por ejemplo, si vamos a calcular el área de un triángulo y conocemos las medidas de sus lados en cm entonces la altura h debe darse también en cm.

Área y perímetro del rectángulo

Consideremos el rectángulo $ABCD$ que se muestra en la Figura 35.5, cuyos lados miden a y b respectivamente.

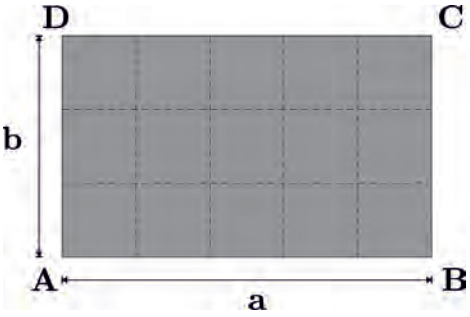


Figura 35.5

En el rectángulo "caben" $a \cdot b$ unidades de área.

Luego, el área del rectángulo es

$A = a \cdot b$.

El perímetro del rectángulo es

$P = a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b)$.

Como en un rectángulo, uno cualquiera de los lados es la base y el lado consecutivo es la altura, llamadas dimensiones del rectángulo, si b es la medida de su base y h la medida de su altura entonces

$$A = b \cdot h$$

y

$$P = 2(b + h).$$

Nota 35.1

En adelante, para simplificar la escritura:

- Cuando nos refiramos a una figura de lado l, estamos diciendo que la medida del lado es l. Así, cuando escribamos "rectángulo de base b y altura h", nos estamos refiriendo a un rectángulo cuya base mide b unidades y cuya altura mide h unidades.
- Cuando nos referimos al área del un polígono $ABCD$, escribimos A_{ABCD}, y cuando nos referimos a su perímetro escribimos P_{ABCD}.

Área y perímetro del cuadrado

Consideremos un cuadrado de lado l, como se muestra en la Figura 35.6.

Como el cuadrado es un rectángulo con $b = h = l$, entonces:

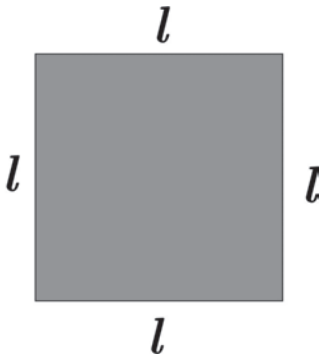


Figura 35.6

El área del cuadrado es

$A = l \cdot l = l^2$.

El perímetro del cuadrado es

$P = 2(l + l) = 2 \cdot 2l = 4l$.

Ejemplo 35.1

- Calcular el área y el perímetro de un rectángulo de lados 2 y 3 cm.
- ¿Cuál es el área y el perímetro de un cuadrado de lado $2\sqrt{2}\ cm$?
- ¿Cuál es el área y el perímetro de un rectángulo de lados 8 m y 200 cm?

Solución

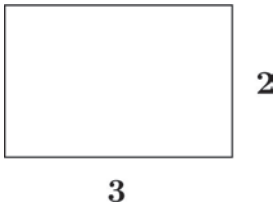


Figura 35.7

El área del rectángulo es

$A = b \cdot h = (2\,cm)(3\,cm) = 6\,cm^2$.

El perímetro del rectángulo es

$P = 2(b+h) = 2(2\,cm+3\,cm) = 2(5\,cm) = 10\,cm$.

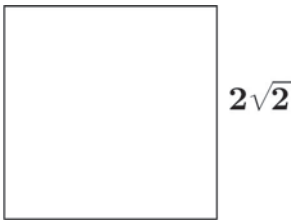


Figura 35.8

El área del cuadrado es

$A = l^2 = \left(2\sqrt{2}\,cm\right)^2 = 8\,cm^2$.

El perímetro del cuadrado es

$P = 4l = 4\left(2\sqrt{2}\,cm\right) = 8\sqrt{2}\,cm$.

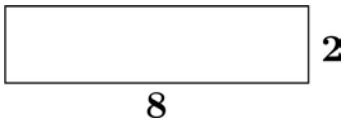


Figura 35.9

Como las medidas están dadas en unidades diferentes, expresemos las dos en metros. Así, $b = 8\ m$ y $h = 200\ cm = 2\ m$. Entonces, el área del rectángulo es

$A = b \cdot h = (8\ m)(2\ m) = 16\ m^2$.

El perímetro del rectángulo es

$P = 2(b + h) = 2(8\ m + 2\ m) = 2(10\,cm) = 20\ m$.

Ejemplo 35.2

Si el piso de una sala rectangular mide 20 *pies* de largo y 80 *pies* de ancho, ¿cuántas baldosas se necesitarán para cubrirlo si cada baldosa es un cuadrado cuyo lado mide 2 *pies*?

Solución

El área del piso de la sala es $A = (20)(80) = 1.600\,pie^2$.

El lado de cada baldosa mide $2\,pie$ y su área es $4\,pie^2$.

Para hallar el número de baldosas, dividimos el área del piso entre el área de cada baldosa.

Luego, número de baldosas $= \dfrac{1.600}{4} = 400$.

Por tanto, se requieren 400 baldosas para cubrir el piso.

Ejemplo 35.3

Si el área de un cuadrado es $81\,cm^2$, hallar:

1. La medida del lado.
2. El perímetro del cuadrado.

Solución

1. Como $A = l^2$, $81 = l^2$ o sea $l = 9\,cm$.
2. Perímetro $= 4l = (4)(9) = 36\,cm$.

Luego, el lado del cuadrado mide $9\,cm$ y su perímetro $36\,cm$.

Área y perímetro del paralelogramo

Consideremos el paralelogramo $ABCD$ de lados a y b y sea h su altura, como se muestra en la Figura 35.10.

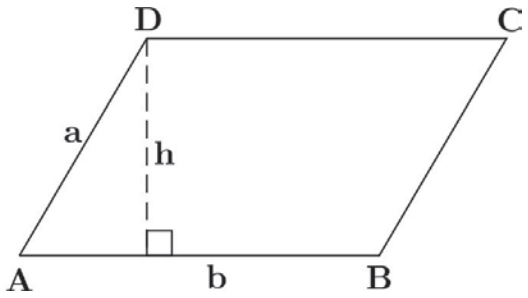


Figura 35.10

Su área es

$$A = b \cdot h.$$

Su perímetro es

$$P = 2(a + b).$$

Prueba

Llamemos E el pie de la perpendicular, que es la altura h del paralelogramo, trazada desde D hasta $\overline{AB}$, como se muestra en la Figura 35.11. Desde el vértice C tracemos una perpendicular $\overline{CF}$ hasta la prolongación del lado $\overline{AB}$.

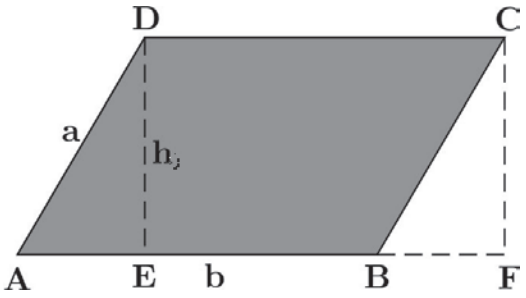


Figura 35.11

$$A_{ABCD} = A_{EFCD} + A_{AED} - A_{BFC} \tag{35.1}$$

$EFCD$ es un rectángulo ya que $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ porque ambas son perpendiculares a $\overline{AB}$, y $\overline{DC} \cong \overline{EF} \cong \overline{AB}$ por ser lados opuestos de paralelogramos. Entonces,

$$A_{EFCD} = \overline{EF} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \cdot h = b \cdot h.$$

Luego,

$$A_{EFCD} = b \cdot h. \tag{35.2}$$

Como

$\triangle AED$ y $\triangle BFC$ son rectángulos porque $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares a $\overline{AB}$,

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un paralelogramo y

$\angle A \cong \angle CBF$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas,

entonces

$\triangle AED \cong \triangle BFC$ por criterio de congruencia A-L-A para triángulos rectángulos.

Luego,

$$A_{AED} = A_{BFC}. \tag{35.3}$$

Entonces, sustituyendo la Ecuación 39.3 en la Ecuación 39.1, tenemos

$$A_{ABCD} = A_{EFCD} + A_{AED} - A_{AED} = A_{EFCD}. \tag{35.4}$$

Luego, sustituyendo la Ecuación 39.2 en la Ecuación 39.4 tenemos que

$$A_{ABCD} = b \cdot h.$$

Entonces, para el paralelogramo $ABCD$ de la Figura 35.11

$$A_{ABCD} = b \cdot h$$

y

$$P_{ABCD} = 2a + 2b = 2(a + b).$$

Ejemplo 35.4

Calcular el área y el perímetro de un paralelogramo $ABCD$ de lados $3\,cm$ y $4\,cm$ y altura $2\,cm$.

Solución

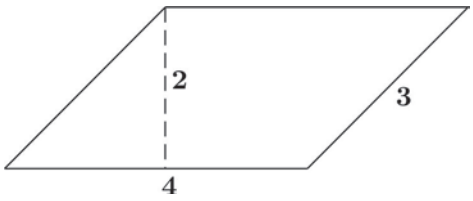


Figura 35.12

El área del paralelogramo es

$A = b \cdot h = (4\,cm)(2\,cm) = 8\,cm^2$.

El perímetro del paralelogramo es

$P = 2(a + b) = 2(3\,cm + 4\,cm)$

$= 2(7\,cm) = 14\,cm$.

Ejemplo 35.5

Hallar la base de un paralelogramo si su área es $48\,cm^2$, su base es $(x + 3)\,cm$ y su altura es $(x + 1)\,cm$.

Solución

El área de un paralelogramo es el producto de sus dimensiones que son base y altura, es decir, $A = bh$.

Reemplazando los valores dados tenemos

$$48 = (x + 3)(x + 1).$$

Resolvamos esta ecuación para x:

$$48 = x^2 + 4x + 3$$

$$0 = x^2 + 4x - 45$$

$$0 = (x + 9)(x - 5).$$

Por tanto, $x = -9$ ó $x = 5$.

Descartamos $x = -9$ porque obtendríamos un valor negativo para la medida de las dimensiones. Luego, $x = 5$.

Entonces, la base del paralelogramo es $x + 3 = 5 + 3 = 8\,cm$.

Ejercicios propuestos

1. El piso rectangular de un local comercial tiene $35\,m$ de largo por $20\,m$ de ancho. ¿Cuántas baldosas rectangulares de $10\,cm$ de largo por $5\,cm$ de ancho se requieren para cubrirlo totalmente?
2. Un rectángulo tiene $96\,m^2$ de área y $44\,m$ de perímetro. Hallar sus dimensiones.
3. ¿Cuál será la base de un paralelogramo de 9 pulgadas de altura si su área es de 63 pulgadas cuadradas?
4. Cuántos rollos de alambre se requieren para cercar un terreno cuadrado de 3.600 m^2 de área, si cada rollo tiene 12 m?

Respuestas

1. 140.000.
2. $b = 16\,m$ y $h = 6\,cm$.
3. 7 pulgadas.
4. 20 rollos.

Lección 36

Área y perímetro de triángulos, rombos y trapecios

En esta lección veremos cómo calcular el perímetro y el área de triángulos, rombos y trapecios.

Área y perímetro del triángulo

Consideremos el $\triangle ABC$ de lados a, b y c y sea h la altura del triángulo trazada desde el vértice B hasta el lado $\overline{AC}$, como se muestra en la Figura 36.1.

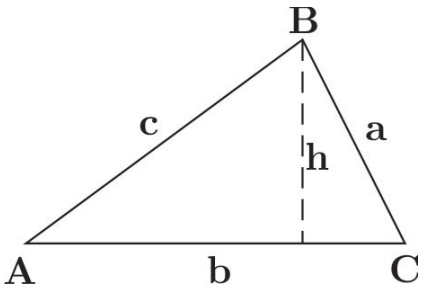


Figura 36.1

Su área es

$$A = \frac{1}{2}\, b \cdot h.$$

Su perímetro es

$$P = a + b + c.$$

Prueba

Tracemos $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$, como se muestra en la Figura 36.2.

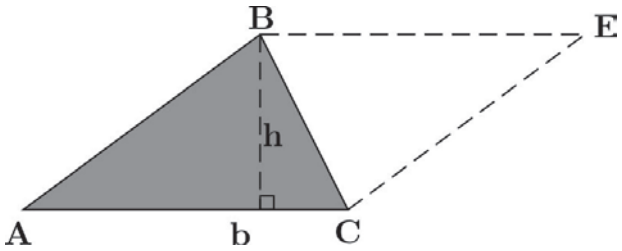


Figura 36.2

$ACEB$ es un paralelogramo cuya altura es h y $\overline{BC}$ es una diagonal que divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes. Luego,

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left(A_{ACEB}\right),$$

y como

$$A_{ACEB} = b \cdot h$$

entonces

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\, bh.$$

Entonces, para el $\triangle ABC$ de la Figura 36.1,

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\, bh,$$

y

$$P_{ABC} = a + b + c.$$

Ejemplo 36.1

Hallar el perímetro y el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $3\,cm$ y $4\,cm$ y cuya hipotenusa mide $5\,cm$.

Solución

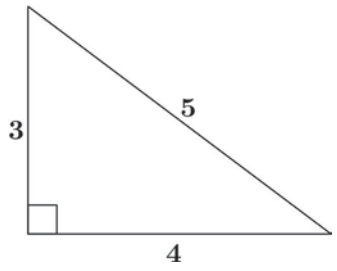


Figura 36.3

$P = 3\,cm + 4\,cm + 5\,cm = 12\,cm.$

Podemos considerar cualquiera de los catetos como la base y el otro será entonces la altura.

Luego,

$A = \frac{1}{2}(4\,cm)(3\,cm) = \frac{1}{2}\left(12\,cm^2\right) = 6\,cm^2.$

Ejemplo 36.2

La Figura 36.4, muestra la fachada de una casa.

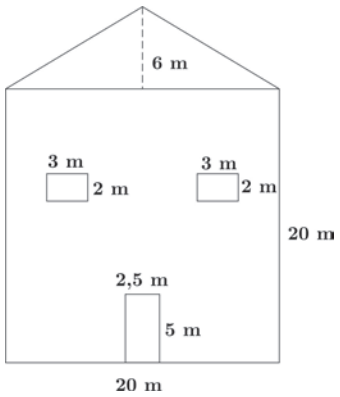


Figura 36.4

El techo tiene forma de triángulo isósceles de altura $6\,m$ y las ventanas y la puerta son rectangulares.

Calcular el área de la fachada sin incluir las ventanas ni la puerta.

Solución

El área de la fachada es igual al área del cuadrado más el área del techo menos el área de las ventanas y de la puerta, es decir

$A_{fachada} = A_{cuadrado} + A_{techo} - 2A_{ventana} - A_{puerta}$.

Como

$A_{cuadrado} = (20)^2 = 400,$

$A_{techo} = \frac{1}{2}(20)(6) = 60,$

$A_{ventana} = (2)(3) = 6$ y

$A_{puerta} = (2,5)(5) = 12,5,$

entonces

$A_{fachada} = 400 + 60 - 12 - 12,5 = 435,5.$

Luego, el área de la fachada es $435,5\, m^2$.

Área y perímetro del rombo

Sea $ABCD$ un rombo y O el punto de corte de sus diagonales, como se muestra en la Figura 36.5.

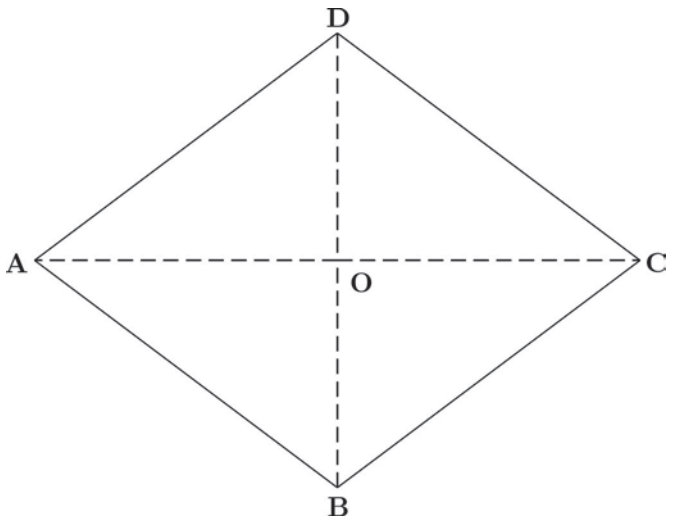


Figura 36.5

$$
\begin{aligned}
A_{ABCD} &= A_{ADC} + A_{ABC} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{AC}\cdot\overline{OD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{AC}\cdot\overline{OB}\right) \quad \text{puesto que las diagonales del rombo son perpendiculares} \\
&= \frac{1}{2}\overline{AC}\left(\overline{OD}+\overline{OB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{AC}\cdot\overline{BD}\right).
\end{aligned}
$$

Entonces, el área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es

$$A = \frac{dd'}{2}$$

y además,

$$P = 4l,$$

con l lado del rombo.

Ejemplo 36.3

Calcular el área y el perímetro de un rombo $ABCD$ de lado $5\ cm$, si sus diagonales miden $6\,cm$ y $8\,cm$.

Solución

Reemplazando los valores dados en $A = \dfrac{dd'}{2}$ y en $P = 4l$, tenemos

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}(8\,cm)\,(6\,cm) = 24\,cm^2$$

y

$$P_{ABCD} = 4(5\,cm) = 20\,cm.$$

Por tanto, el área del rombo es $24\,cm^2$ y su perímetro es $20\,cm$.

Área y perímetro del trapecio

Consideremos el trapecio $ABCD$ con b la base mayor, b' la base menor y h la altura, como se muestra en la Figura 36.6.

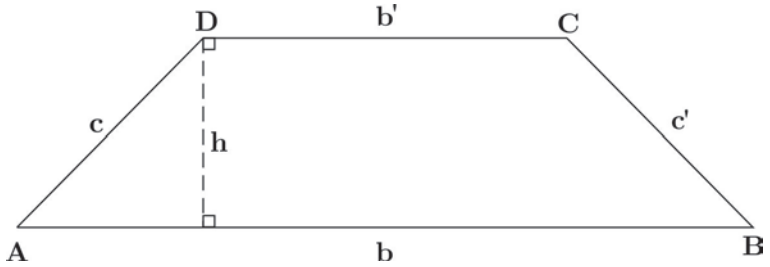


Figura 36.6

Si trazamos la diagonal $\overline{DB}$ se forman dos triángulos: el $\triangle ADB$ con base b y altura h y el $\triangle DBC$ con base b' y altura h, como se muestra en la Figura 36.7.

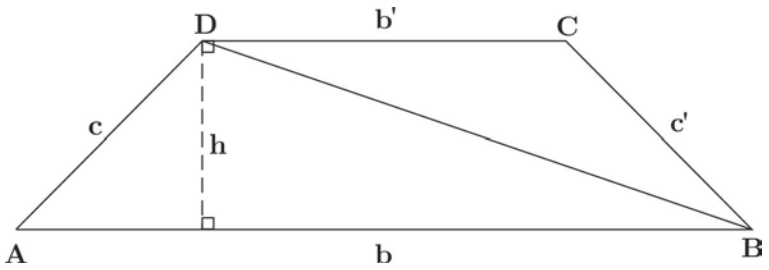


Figura 36.7

El área del trapecio, A_{ABCD} es la suma de las áreas de los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle DBC$.

Como $A_{ADB} = \dfrac{1}{2}\,bh$ y $A_{DBC} = \dfrac{1}{2}\,b'h$, entonces

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\,bh + \frac{1}{2}\,b'h = \frac{1}{2}\,(b + b')h.$$

Luego,

$$A_{ABCD} = \frac{b + b'}{2}\,h.$$

Si además c y c' son los lados no paralelos, su perímetro es

$$P_{ABCD} = b + b' + c + c'.$$

Ejemplo 36.4

Hallar la altura de un trapecio si las bases miden $13\,cm$ y $7\,cm$ y su área es $40\,cm^2$.

Solución

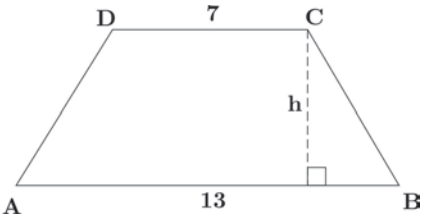


Figura 36.8

Llamemos h la altura del trapecio. Como $\overline{AB} = 13\,cm$ es la base mayor, $\overline{CD} = 7\,cm$ es la base menor y $A_{ABCD} = 40\ cm^2$, entonces reemplazando los valores dados en

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)h,$$

tenemos

$$40 = \frac{1}{2}(13+7)\,h$$

$$80 = 20h$$

$$h = 4.$$

Luego, la altura del trapecio es $4\,cm$.

Ejercicios propuestos

1. Determinar la altura de un triángulo de área 32,5 cm^2, cuya base mide 10 cm.
2. La base de un triángulo es el doble de su altura. Determine el valor de ambas si su área es de 36 cm^2.
3. Si el área de un rombo es 37 cm^2 y una de sus diagonales mide 7,4 cm ¿cuánto mide la otra diagonal?
4. Probar que el área de un cuadrado es igual a la mitad del cuadrado de la diagonal.
5. Hallar el área y el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 13 cm y 5 cm respectivamente, su altura mide 3 cm y cada uno de sus lados no paralelos 5 cm.

Respuestas

1. 6,5 cm.
2. $h = 6\,cm$ y $b = 12\,cm$.
3. 10 cm.
4. Ayuda: el cuadrado es un rombo.
5. $A = 27\,cm^2$ y $P = 28\,cm$.

Lección 37

Teorema de Pitágoras

En esta lección veremos uno de los teoremas más importantes en la Geometría, conocido como el **Teorema de Pitágoras**, el cual da una relación simple pero muy útil entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Presentaremos además dos de las muchas pruebas que se han hecho y una ilustración gráfica del teorema .

Teorema 37.1 *Teorema de Pitágoras*

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

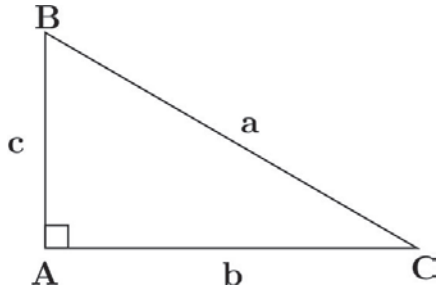


Figura 37.1

Si $\triangle ABC$ es rectángulo con $\angle A$ recto,
$\overline{BC} = a$ es la hipotenusa y
$\overline{AC} = b$ y $\overline{AB} = c$ son los catetos,
entonces $a^2 = b^2 + c^2$.

Veremos primero una prueba usando semejanza de triángulos.

Prueba 1

Consideremos el $\triangle ABC$ con $\angle A$ recto, como se muestra en la Figura 37.2.

Sea $\overline{AD}$ la altura relativa a la hipotenusa.

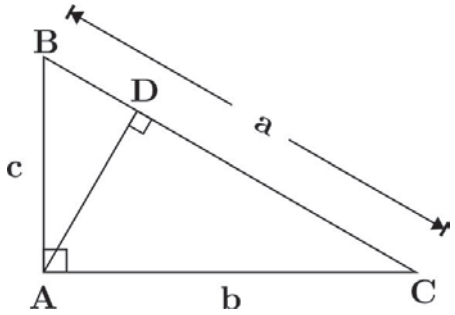


Figura 37.2

Como $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\overline{CD}}$$

y así,

$$a(\overline{CD}) = b^2. \tag{37.1}$$

Como $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, entonces

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{\overline{DB}}$$

y así,

$$a(\overline{DB}) = c^2. \tag{37.2}$$

Sumando las Ecuaciones 37.1 y 37.2 tenemos

$$a(\overline{CD} + \overline{DB}) = b^2 + c^2$$

y como

$$\overline{CD} + \overline{DB} = \overline{CB} = a$$

entonces

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Veamos ahora una prueba usando una construcción geométrica.

Prueba 2

Consideremos el $\triangle ABC$ con $\angle A$ recto, como se muestra en la Figura 37.3.

Sean $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ los catetos y $\overline{BC} = a$ la hipotenusa del triángulo.

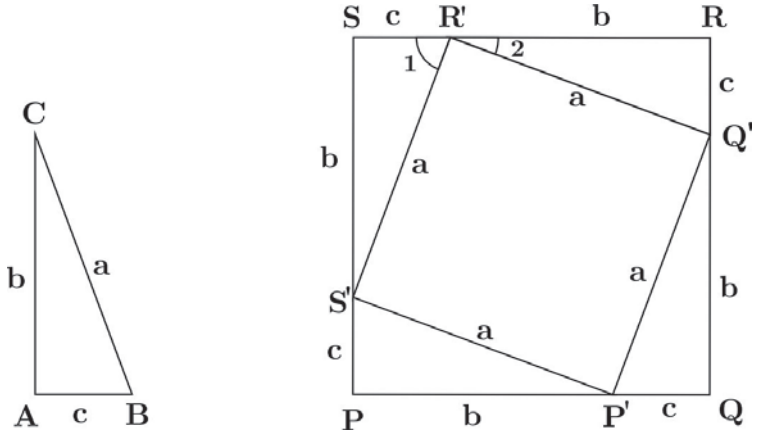


Figura 37.3

Construyamos un cuadrado $PQRS$ cuyo lado mide $b + c$.

Tomemos un punto P' sobre $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PP'} = b$, entonces $\overline{P'Q} = c$. En forma similar escogemos Q', R' y S' sobre $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$ respectivamente.

Los segmentos $\overline{P'Q'}$, $\overline{Q'R'}$, $\overline{R'S'}$ y $\overline{S'P'}$ determinan cuatro triángulos rectángulos congruentes con el $\triangle ABC$ por el criterio de congruencia L-A-L y así, $\overline{P'Q'} \cong \overline{Q'R'} \cong \overline{R'S'} \cong \overline{S'P'}$ y su medida es a. Entonces, $P'Q'R'S'$ es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes. Además, como $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle S'R'Q' = 90°$, y así los cuatro ángulos son rectos. Luego $P'Q'R'S'$ es un cuadrado.

Calculemos el área del cuadrado $PQRS$ en dos formas:

Como cada lado tiene medida $b + c$, su área es $(b + c)^2$. De otro lado, el área del cuadrado grande es la suma de las áreas de los cuatro triángulos congruentes y del área del cuadrado pequeño, en los cuales se ha dividido. Cada triángulo tiene área $\frac{1}{2}(bc)$ y el área del cuadrado pequeño es a^2. Luego,

$$\text{Área de PQRS} = (b + c)^2 = 4\left(\frac{1}{2}bc\right) + a^2, \text{ y así,}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2.$$

Luego,

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Ilustración gráfica del Teorema de Pitágoras

En cada lado del triángulo rectángulo construimos un cuadrado por fuera del triángulo, como se muestra en la Figura 37.4. El Teorema de Pitágoras garantiza que el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos.

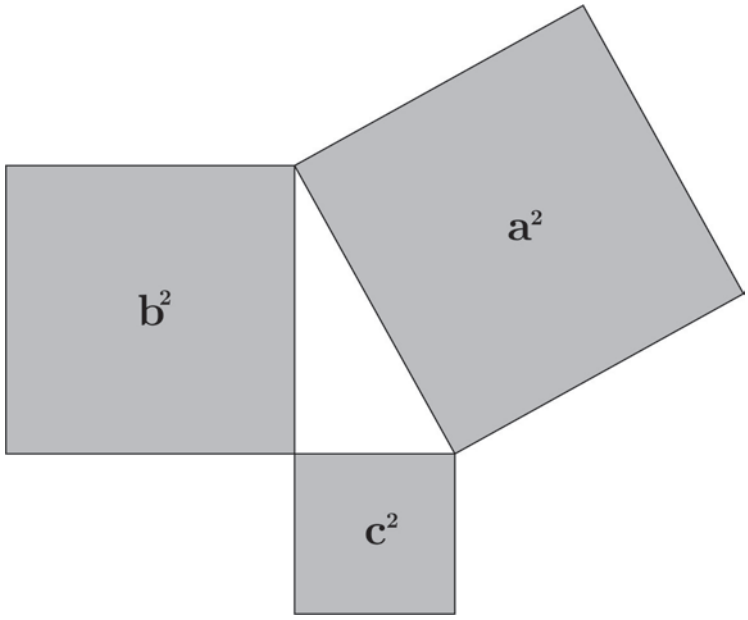


Figura 37.4

El recíproco del Teorema de Pitágoras también es válido, es decir, si en un $\triangle ABC$ se cumple

que $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el $\angle A$ es recto.

Ejemplo 37.1

Por el recíproco del Teorema de Pitágoras, un $\triangle ABC$ cuyos lados miden 3, 4 y 5 es un triángulo rectángulo, ya que $3^2 + 4^4 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Su hipotenusa mide 5.

Ejemplo 37.2

¿Por qué el triángulo cuyos lados miden 5, 12 y 13 es rectángulo?

Solución

Como $5^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169 = (13)^2$, entonces por el recíproco del Teorema de Pitágoras, el triángulo es rectángulo y su hipotenusa mide 13.

Nota 37.1

Si en un triángulo rectángulo conocemos la medida de dos de sus lados podemos encontrar la medida del tercero usando el Teorema de Piágoras así

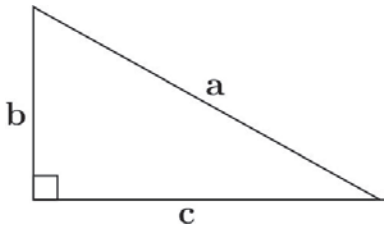


Figura 37.5

1. Si conocemos las medidas b y c de los dos catetos y queremos hallar la medida de la hipotenusa, como $a^2 = b^2 + c^2$, entonces

   $$a = \pm\sqrt{b^2 + c^2}.$$

   Como la medida de la hipotenusa es un número real positivo o cero, tomamos el valor positivo de la raíz y así

   $$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

   Por ejemplo, si en un triángulo rectángulo los catetos miden $3\,cm$ y $5\,cm$, la medida de la hipotenusa es $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$, es decir, la medida de la hipotenusa es $\sqrt{34}\,cm$.

2. Conocidas las medidas, b de un cateto y a de la hipotenusa, la medida c del otro cateto está dada por $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, ya que por el Teorema de Pitágoras,

   $$a^2 = b^2 + c^2.$$

   Luego,

   $$c^2 = a^2 - b^2$$

y entonces

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Como queremos hallar una medida, tomamos el valor positivo de la raíz.

Por ejemplo, en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $6\,cm$ y uno de los catetos mide $4\,cm$, la medida del otro cateto está dada por $\sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 24} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, es decir, el otro cateto mide $2\sqrt{3}\,cm$.

Ejemplo 37.3

¿Cuál es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $5\,cm$ y $6\,cm$?

Solución

Consideremos el $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle A$ recto, como se muestra en la Figura 37.6.

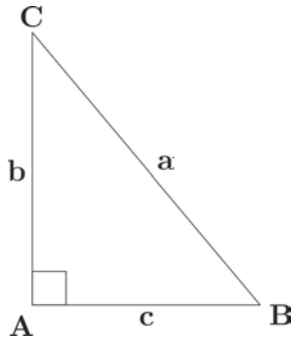


Figura 37.6

Si $b = 6\,cm$ y $c = 5\,cm$,

por el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= 6^2 + 5^2 \\ &= 36 + 25 \\ &= 61. \end{aligned}$$

Por tanto, $a = \sqrt{61}$.

Luego, la hipotenusa del triángulo mide $\sqrt{61}\,cm$.

Ejemplo 37.4

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $12\,cm$. ¿Cuánto miden los catetos si están en la relación 3 a 5?

Solución

Consideremos el $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle A$ recto, como se muestra en la Figura 37.7.

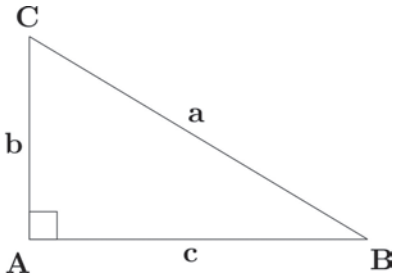


Figura 37.7

Como los catetos están en la relación 3 a 5, esto quiere decir que $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$. Entonces $b = \frac{3}{5}\,c$.

Por el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= \left(\frac{3}{5}\,c\right)^2 + c^2 \\ &= \frac{9}{25}\,c^2 + c^2 \\ &= \frac{9c^2 + 25c^2}{25} \\ &= \frac{9 + 25}{25}\,c^2 \\ &= \frac{34}{25}\,c^2. \end{aligned}$$

Como $a = 12$, entonces $(12)^2 = \frac{34}{25}\,c^2$.

Luego, $c^2 = \frac{(144)(25)}{34}$ y así $c = \frac{30\sqrt{34}}{17}$.

Como $b = \frac{3}{5}\,c$, $b = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{30\sqrt{34}}{17}\right) = \frac{18\sqrt{34}}{17}$.

Por tanto, los catetos del triángulo miden $\frac{30\sqrt{34}}{17}\,cm$ y $\frac{18\sqrt{34}}{17}\,cm$.

Ejemplo 37.5

¿Cuál es la medida de uno de los catetos de un triángulo rectángulo si la hipotenusa mide $12\,cm$ y el otro cateto mide $7\,cm$?

Solución

Consideremos el $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle A$ recto, como se muestra en la Figura 37.8.

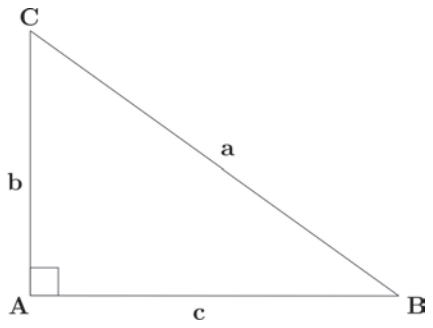


Figura 37.8

Si $a = 12\,cm$ y $b = 7\,cm$,
por el Teorema de Pitágoras
$a^2 = b^2 + c^2$.
Luego, $a^2 - b^2 = c^2$.
Entonces, $c^2 = (12)^2 - 7^2 = 144 - 49 = 95$,
y así $c = \sqrt{95}$.

Luego, el otro cateto del triángulo mide $\sqrt{95}\ cm$.

Ejercicios propuestos

1. Determinar la medida de uno de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $15\,cm$, si el otro cateto mide $8\,cm$.
2. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyo cateto mide $8\,cm$?
3. Determinar la medida del segmento $\overline{RS}$ de la Figura 37.9.

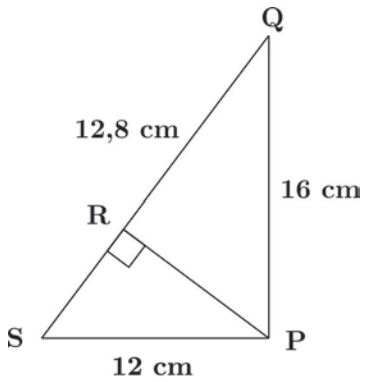


Figura 37.9

4. ¿Cuál es la medida del cateto $\overline{PQ}$ del triángulo que se muestra en la Figura 37.10?

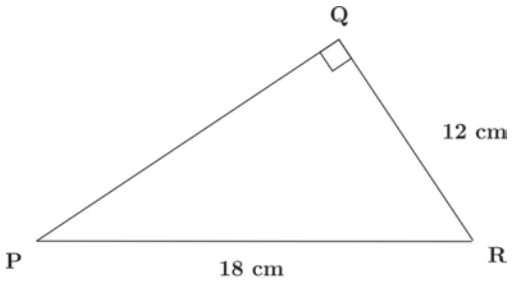


Figura 37.10

Respuestas

1. $\sqrt{161}\,cm.$
2. $8\sqrt{2}\,cm.$
3. 7,2 $cm.$
4. $6\sqrt{5}\,cm.$

Lección 38

Teorema de Pitágoras
Aplicaciones

En esta lección veremos algunas aplicaciones del Teorema de Pitágoras.

1. Calcular la diagonal de un rectángulo conocida la medida de sus lados.

   La diagonal de un rectángulo es la hipotenusa y dos de sus lados son los catetos de un triángulo rectángulo. Si d es la medida de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden b y c respectivamente, $d = \sqrt{b^2 + c^2}$.

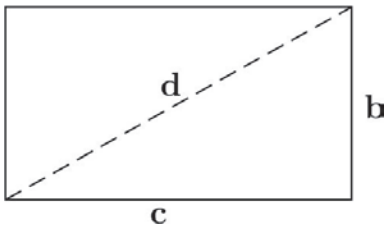


Figura 38.1

Por ejemplo, la diagonal d de un rectángulo cuyos lados miden $4\,cm$ y $3\,cm$ está dada por $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. Luego, la diagonal mide $5\,cm$.

Ejemplo 38.1

¿Cuál es la diagonal de un rectángulo cuya base mide $6\,cm$ y su altura mide $2\,cm$?

Solución

Consideremos el rectángulo $ABCD$ con $\overline{AC} = d$ una diagonal, $\overline{CB} = h$ la altura y $\overline{AB} = b$ la base, como se muestra en la Figura 38.2.

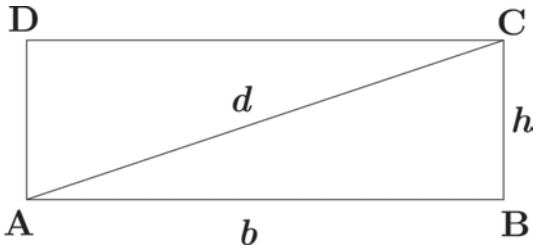


Figura 38.2

Como $\triangle ABC$ es rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} d^2 &= h^2 + b^2 \\ &= 2^2 + 6^2 \\ &= 40. \end{aligned}$$

Entonces, $d = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Luego, la diagonal del rectángulo mide $2\sqrt{10}\ cm$.

2. Calcular la diagonal de un cuadrado conociendo la medida del lado.

   En un cuadrado de lado l la medida de la diagonal d está dada por

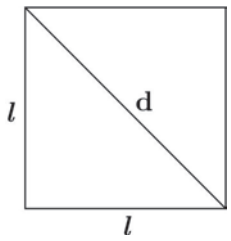


Figura 38.3

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}.$$

Así, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide $5\,cm$, es $d = 5\sqrt{2}\,cm$.

Ejemplo 38.2

Hallar el lado de un cuadrado cuya diagonal mide $5\,cm$.

Solución

Consideremos el cuadrado $ABCD$ con l la medida de su lado y d la diagonal $\overline{AC}$, como se muestra en la Figura 38.4.

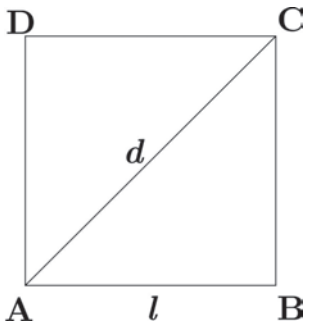


Figura 38.4

Por el Teorema de Pitágoras
$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$.
Luego,
$l^2 = \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{5^2}{2} = \dfrac{25}{2}$ y así
$l = \sqrt{\dfrac{25}{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Por tanto, el lado del cuadrado mide $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\ cm$.

3. Calcular la altura relativa a la base de un triángulo isósceles conocida la medida de cada uno de sus lados.

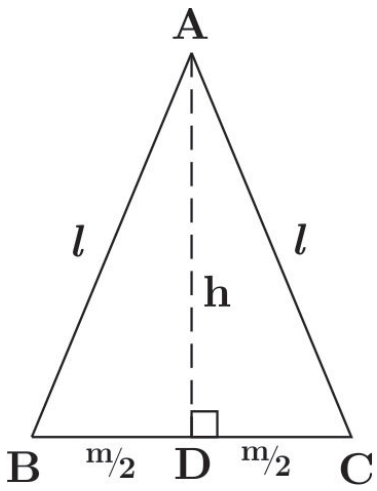


Figura 38.5

Sea $\triangle ABC$ isósceles y sea h la altura relativa a la base $\overline{BC}$. Si D es el punto donde la altura corta el lado $\overline{BC}$, el $\triangle ADB$ y el $\triangle ADC$ son rectángulos y como la altura es a su vez mediana, D es punto medio de $\overline{BC}$.

Entonces, si la medida de los lados congruentes del triángulo es l y la base tiene medida m, la altura h está dada por

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - m^2}.$$

Por ejemplo, la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide $3\,cm$ es

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

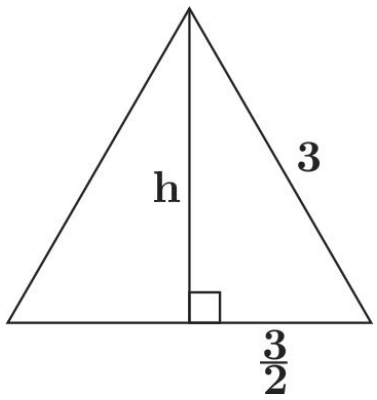


Figura 38.6

Luego, la altura del triángulo mide $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,cm$.

Ejemplo 38.3

¿Cuál es la medida de cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles si la base mide $16\,cm$ y la altura $6\,cm$?

Solución

Consideremos el $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $h = \overline{AD}$ su altura como se muestra en la Figura 38.7.

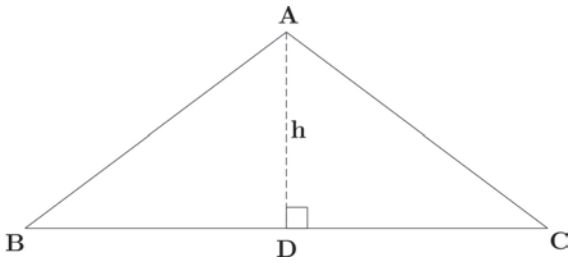


Figura 38.7

Como $h = 6$ y $\overline{BD} = \dfrac{1}{2}\,\overline{BC} = \dfrac{1}{2}(16) = 8$, porque la altura es también mediana, por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$\begin{aligned}\left(\overline{AB}\right)^2 &= \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{AD}\right)^2 \\ &= 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 \\ &= 100.\end{aligned}$$

Entonces, $\overline{AB} = \sqrt{100} = 10$.

Luego, cada uno de los lados congruentes del triángulo mide $10\,cm$.

4. Calcular el área de un triángulo equilátero conocida la medida de su lado.

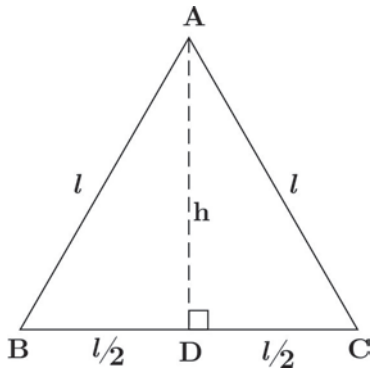


Figura 38.8

Sea $\triangle ABC$ equilátero de lado l y sea h la altura relativa a $\overline{BC}$. Si D es el punto donde la altura corta el lado $\overline{BC}$, el $\triangle ADB$ y el $\triangle ADC$ son rectángulos y como la altura es a su vez mediana, D es punto medio de $\overline{BC}$.

Entonces $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ tienen medida $\dfrac{l}{2}$ y la altura h está dada por

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - l^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3l^2} = \frac{1}{2}\left(l\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l.$$

Luego, el área del triángulo equilátero de lado l está dada por

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2}\,l\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,l\right) \\ &= \frac{1}{4}\,\sqrt{3}l^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 38.4

Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 24 centímetros.

Solución

Como el perímetro del triángulo mide 24, entonces $l = \dfrac{24}{3} = 8$.

Luego,

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(8)^2 = \frac{64}{4}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$$

Por tanto, el área del triángulo equilátero es $16\sqrt{3}\,cm^2$.

Ejercicios propuestos

1. Hallar la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden $8\,cm$ y $4\,cm$.
2. ¿Cuál es la diagonal de un cuadrado de lado $9\,cm$?
3. Hallar el área de un triángulo isósceles de base 12 pulgadas y cuyos lados congruentes miden 10 pulgadas cada uno.
4. El lado de un triángulo equilátero es $4\,cm$. Hallar el área de dicho triángulo.

Respuestas

1. $4\sqrt{5}\,cm$.
2. $9\sqrt{2}\,cm$.
3. 48 pulgadas cuadradas.
4. $8\sqrt{3}\,cm^2$.

Lección 39

Teorema de Pitágoras
Otras aplicaciones

En esta lección veremos otras aplicaciones del Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 39.1

En un triángulo rectángulo isósceles la altura trazada desde el ángulo recto divide al lado opuesto en dos segmentos que miden $2\,cm$ cada uno. Calcular la medida de la altura y de los tres lados del triángulo.

Solución

Consideremos el $\triangle ABC$ rectángulo isósceles con $\angle A$ recto, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $h = \overline{AD}$ la altura, como se muestra en la Figura 39.1.

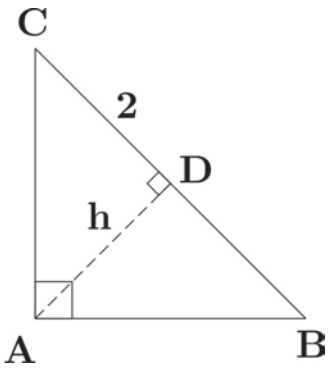


Figura 39.1

Como $\triangle ADC \sim \triangle BAC$, entonces

$$\frac{h}{2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Como $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 1$, por ser $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, ya que $\triangle ABC$ es isósceles, entonces $h = 2$.

Por el Teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}\left(\overline{AC}\right)^2 &= h^2 + \left(\overline{CD}\right)^2 \\ &= 2^2 + 2^2 \\ &= 8.\end{aligned}$$

Entonces, $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Por tanto, la altura del triángulo mide $2\,cm$, cada uno de los catetos congruentes mide $2\sqrt{2}\,cm$ y la hipotenusa mide $4\,cm$.

Ejemplo 39.2

El pie de una escalera apoyada en una pared está a $5\,m$ de distancia de la pared. ¿Cuál es la medida de la escalera si llega a una altura de $10\,m$?

Solución

Llamemos e la medida de la escalera.

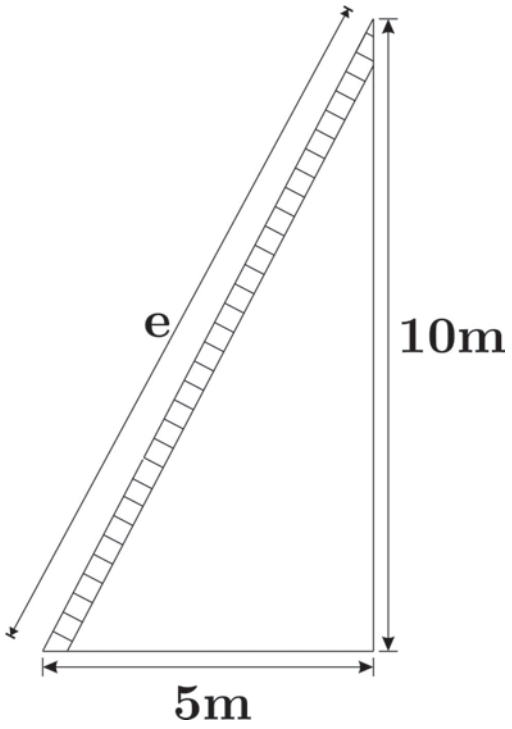


Figura 39.2

Como la escalera forma con la pared y el piso un triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura 39.2, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos

$$\begin{aligned} e^2 &= (10)^2 + 5^2 \\ &= 100 + 25 \\ &= 125. \end{aligned}$$

Entonces, $e = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Por tanto, la escalera mide $5\sqrt{5}\ m$.

Ejemplo 39.3

¿Cuánto mide el lado de un rombo cuyas diagonales miden $6\,cm$ y $10\,cm$?

Solución

Consideremos el rombo $ABCD$ con E el punto de intersección de las diagonales, como se muestra en la Figura 39.3.

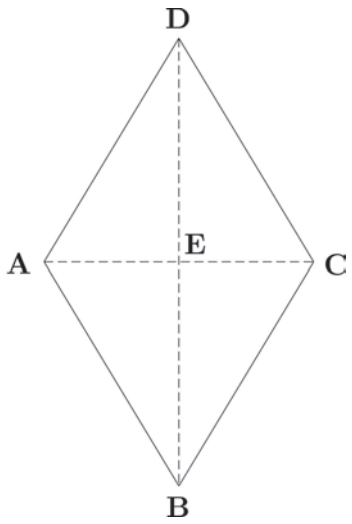


Figura 39.3

Como las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y se cortan en el punto medio porque el rombo es un paralelogramo, entonces el $\triangle AEB$ es rectángulo con

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}(6) = 3, \text{ y}$$

$$\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}(10) = 5.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}\left(\overline{AD}\right)^2 &= \left(\overline{AE}\right)^2 + \left(\overline{DE}\right)^2 \\ &= 3^2 + 5^2 \\ &= 34.\end{aligned}$$

Entonces, $\overline{AD} = \sqrt{34}$.

Luego, cada uno de los lados del rombo mide $\sqrt{34}\ cm$.

Ejemplo 39.4

¿Cuál es la medida de la altura de un trapecio rectángulo cuyas bases miden $6\,cm$ y $4\,cm$ y su ángulo agudo mide $45°$?

Solución

Consideremos el trapecio $ABCD$ rectángulo como se muestra en la Figura 39.4.

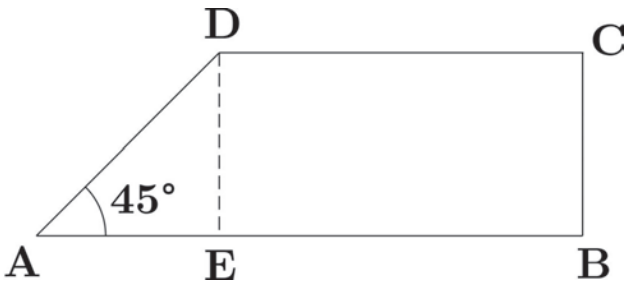


Figura 39.4

Si trazamos la altura $\overline{DE}$ desde D hasta la base mayor, se forma el ΔAED rectángulo e isósceles porque $\angle A \cong \angle ADE$ por ser complementarios.

Como

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \overline{AB} - \overline{EB} \\ &= \overline{AB} - \overline{DC} \\ &= 6 - 4 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Entonces $\overline{AE} = 2$ y como el $\triangle AED$ es isósceles, $\overline{DE} = 2$.

Luego, la altura del trapecio mide $2\,cm$.

Ejemplo 39.5

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $6\,cm$ y uno de los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa mide $2\,cm$. Calcular la medida de dicha altura y de los catetos.

Solución

Consideremos el $\triangle BAC$ rectángulo con $\angle A$ recto, y $h = \overline{AD}$ la altura relativa a la hipotenusa, como se muestra en la Figura 39.5.

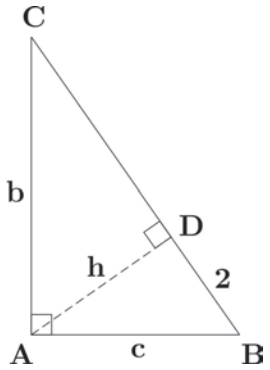


Figura 39.5

Como $\overline{BD} = 2$ entonces $\overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BD} = 6 - 2 = 4$.

Como $\triangle ADB$ es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras

$$h^2 = c^2 - 2^2. \tag{39.1}$$

Como $\triangle ADC$ es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras

$$h^2 = b^2 - 4^2. \tag{39.2}$$

Restando miembro a miembro la Ecuación 39.1 de la Ecuación 39.2 tenemos

$$0 = b^2 - 16 - c^2 + 4$$

o equivalentemente

$$b^2 - c^2 = 12. \tag{39.3}$$

Como $\triangle BAC$ es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras

$$b^2 + c^2 = 36. \tag{39.4}$$

Sumando miembro a miembro las Ecuaciones 39.3 y 39.4 tenemos $2b^2 = 48$, luego $b^2 = 24$ y reemplazando en 39.3, $24 - c^2 = 12$, luego $24 - 12 = c^2 = 12$.

Entonces $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Para hallar h reemplazamos c^2 en la Ecuación 39.1 y obtenemos $h^2 = 12 - 4 = 8$. Luego, $h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Por tanto, los catetos miden $2\sqrt{3}\ cm$ y $2\sqrt{6}\ cm$ y la altura mide $2\sqrt{2}\ cm$.

Nota 39.1

El Ejemplo 39.5 también puede resolverse usando semejanza de triángulos.

Ejercicios propuestos

1. Una escalera de $6\,m$ está apoyada en una pared y se separa $2\,m$ de ella. ¿Hasta qué altura de la pared llega la escalera?

2. Un terreno tiene la forma de un trapecio isósceles. La base menor es $\frac{3}{4}$ de la mayor, la diferencia de las bases es $400\,m$ y el lado no paralelo mide $600\,m$. Hallar las bases, la altura y el área del terreno.

3. En orillas opuestas de un río crecen dos árboles, uno frente al otro, en forma vertical. La altura de uno de ellos es de $30\,m$ y la del otro es de $20\,m$. La distancia entre los pies de los árboles es de $50\,m$. En la copa de cada árbol hay un pájaro. De repente estos pájaros ven un pez en la superficie del agua, entre los dos árboles, se lanzan y alcanzan el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del árbol más alto apareció el pez?

Respuestas

1. $4\sqrt{2}$ metros.
2. Base mayor = 1.600 metros, base menor = 1.200 metros, altura = $400\sqrt{2}$ metros y área del terreno = $560.000\sqrt{2}$ metros cuadrados.
3. A 20 metros.

Lección 40

Circunferencia

En esta lección veremos la circunferencia, las rectas y segmentos de recta relacionados con ella, el concepto de arco y las posiciones relativas de un punto y una circunferencia.

Recordemos la definición de circunferencia dada en una lección anterior.

Sea O un punto de un plano dado y r un número real positivo. La **circunferencia** con **centro** O y **radio** r es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto O. En otras palabras, la circunferencia es el conjunto de puntos de un plano, que "equidistan" de otro punto del plano, llamado centro de la circunferencia.

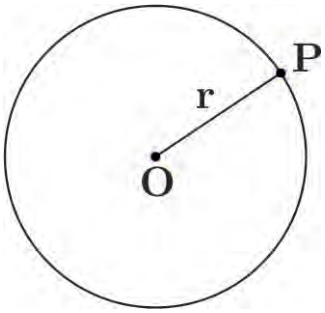


Figura 40.1

En la Figura 40.1,

O centro de la circunferencia,

P punto de la circunferencia,

$\overline{OP} = r$ radio de la circunferencia.

Las rectas y segmentos de recta relacionados con la circunferencia son:

Una **cuerda** de una circunferencia es un segmento de recta cuyos extremos están en la circunferencia.

Un **diámetro** de una circunferencia es una cuerda que contiene al centro.

Una recta que corta a una circunferencia en dos puntos se llama **recta secante** a la circunferencia. Así, cada cuerda determina una recta secante y cada recta secante contiene una cuerda.

Una **recta tangente** a una circunferencia es una recta en el plano de la circunferencia, que corta a ésta en un solo punto. Este punto se llama **punto de tangencia** y se dice que la recta y la circunferencia son **tangentes**.

Una recta es **exterior** a una circunferencia si está en el mismo plano de la circunferencia y no la corta.

Además, un **arco** de una circunferencia es la porción de circunferencia comprendida entre dos puntos de la circunferencia, incluidos ambos. Si E y D son dos puntos de la circunferencia, denotamos por $\overset{\frown}{\text{ED}}$ el arco ED y decimos que la cuerda $\overline{ED}$ **subtiende** el arco $\overset{\frown}{\text{ED}}$, como se muestra en la Figura 40.2.

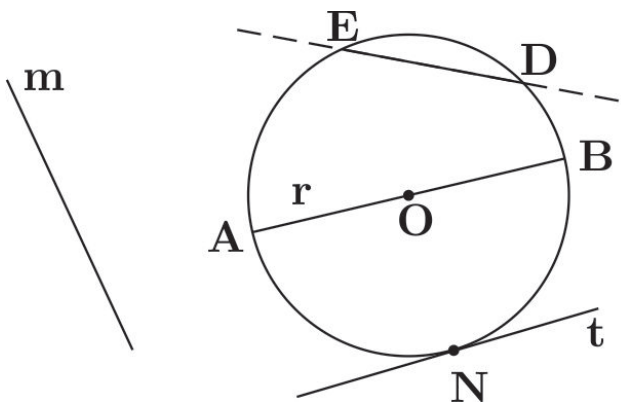


Figura 40.2

En la Figura 40.2,

O es el centro de la circunferencia,

$\overline{OA} = r$ es un radio de la circunferencia,

$\overline{AB}$ es un diámetro, $\overline{AB} = 2r$,

$\overline{ED}$ es una cuerda,

ED es una recta secante,

$\overset{\frown}{\text{ED}}$ es un arco,

t es una recta tangente en el punto N y

m es una recta exterior a la circunferencia.

Posiciones relativas de un punto y una circunferencia

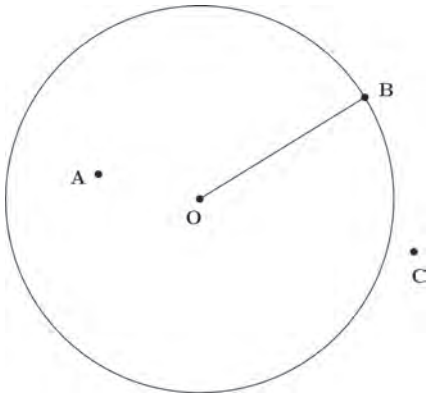


Figura 40.3

En la Figura 40.3,

A , B y C son puntos del plano de una circunferencia de centro O y radio r.

Decimos que un punto del plano de la circunferencia es **interior** a la circunferencia, si su distancia al centro es menor que un radio. Un punto **está** en la circunferencia si su distancia al centro es igual a un radio y un punto es **exterior** a la circunferencia si su distancia al centro es mayor que un radio.

En la Figura 40.3 tenemos que A es un punto interior, B es un punto de la circunferencia y C es un punto exterior.

En el siguiente teorema probamos una propiedad muy importante de la recta tangente a una circunferencia.

Teorema 40.1

Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.

Prueba

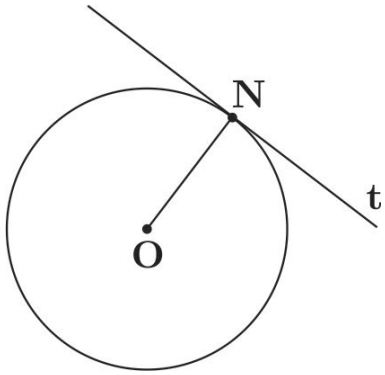


Figura 40.4

En la Figura 40.4, t es una recta tangente en el punto N, a la circunferencia con centro en O.

Debemos probar que $\overline{ON} \perp t$.

N es un punto de la circunferencia y un punto de la recta t. Como t es tangente a la circunferencia, cualquier otro punto Q de la recta t no es un punto de la circunferencia y por tanto es exterior a ella. Luego, la medida de $\overline{OQ}$ es mayor que la medida de $\overline{ON}$. Entonces, $\overline{ON}$ es la menor distancia de O a la recta t y por tanto $\overline{ON}$ es perpendicular a la recta t en el punto N.

Ejemplo 40.1

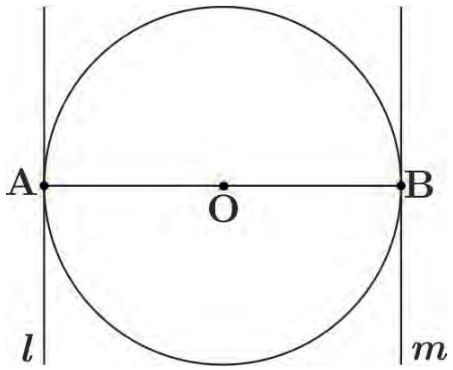


Figura 40.5

En la Figura 40.5, sean

$\overline{AB}$ un diámetro de la circunferencia con centro en O y

l y m rectas tangentes a la circunferencia en los puntos A y B respectivamente.

Demostrar que $l \parallel m$.

Solución

Como $\overline{OB}$ es el radio trazado al punto de tangencia, entonces $\overline{OB} \perp m$.

Como $\overline{OA}$ es el radio trazado al punto de tangencia, entonces $\overline{OA} \perp l$.

Luego, $\overline{AB} \perp l$ y $\overline{AB} \perp m$.

Por tanto, $l \parallel m$ porque dos rectas diferentes, perpendiculares a la misma recta, son paralelas entre sí.

Teorema 40.2

La perpendicular trazada desde el centro de una circunferencia a una cuerda, la biseca.

Prueba

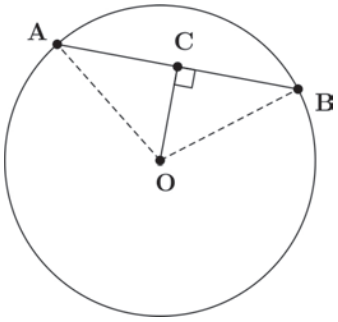


Figura 40.6

En la Figura 40.6,

$\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia con centro en O y $\overline{OC} \perp \overline{AB}$.

Debemos demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

Trazamos los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ como se muestra en la Figura 40.6.

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ por ser radios de la misma circunferencia y $\overline{OC}$ es lado común de los triángulos $\triangle ACO$ y $\triangle BCO$.

Como son triángulos rectángulos, aplicamos en cada uno el Teorema de Pitágoras para encontrar los catetos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2}$$

y

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}.$$

Por tanto, $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

Ejemplo 40.2

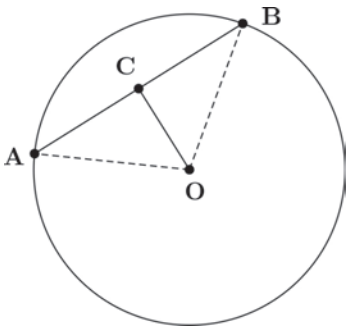


Figura 40.7

En la Figura 40.7,

$\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia con centro en O que tiene un radio $r = 10\ cm$.

La cuerda dista 6 cm del centro.

¿Cuál es la medida de la cuerda?

Solución

Llamemos C el pie de la perpendicular trazada desde O hasta $\overline{AB}$.

Trazamos los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ formando los triángulos $\triangle ACO$ y $\triangle BCO$.

Como $\overline{OC}$ es la distancia del centro a la cuerda, entonces $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ y según el Teorema 40.2, C es punto medio de $\overline{AB}$.

Por tanto, el $\triangle ACO$ es rectángulo y podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar el valor de $\overline{AC}$ y con el encontrar $\overline{AB}$.

$\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{AC}^2$.

Despejando $\overline{AC}$ y reemplazando los valores de $\overline{OC}$ y $\overline{AB}$ tenemos

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{(10)^2 - (6)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$

Luego, la medida de la cuerda es $\overline{AB} = 2(\overline{AC}) = 16\ cm.$

Ejemplo 40.3

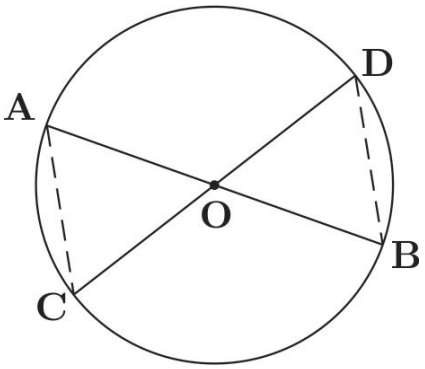


Figura 40.8

En la Figura 40.8,

si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros de la circunferencia con centro en O,

demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

Solución

Como

$\overline{AO} \cong \overline{OB}$ por ser radios de una misma circunferencia,

$\angle AOC \cong \angle BOD$ por ser opuestos por el vértice y

$\overline{CO} \cong \overline{OD}$ por ser radios de la misma circunferencia,

entonces

$\triangle AOC \cong \triangle BOD$ por el criterio de congruencia L-A-L.

Luego,

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes y

$\angle A \cong \angle B$ por la misma razón anterior, y como son ángulos alternos internos, entonces

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

Ejercicios propuestos

1. Una cuerda que mide 16 cm está a una distancia de 15 cm del centro de la circunferencia. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia?
2. En una circunferencia, una cuerda que mide 12 cm es paralela a una recta tangente a la circunferencia y biseca el radio trazado al punto de tangencia. ¿Cuál es la longitud del radio?
3. Indicar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero (V) o falso (F).
   (a) Un diámetro de una circunferencia determina una recta secante a la circunferencia.
   (b) Un radio es una cuerda de una circunferencia.
   (c) Una cuerda de una circunferencia contiene exactamente dos puntos de la circunferencia.
   (d) Una recta y una circunferencia pueden tener tres puntos en común.
   (e) La intersección de una recta y una circunferencia puede ser vacía.

Respuestas

1. 17 cm.
2. $4\sqrt{3}$ cm.
3. (a) V.
   (b) F.
   (c) V.
   (d) F.
   (e) V.

Lección 41

Ángulos en la circunferencia

En esta lección veremos algunos de los ángulos en la circunferencia, sus nombres según la posición del vértice y de los lados respecto a ella y sus medidas.

Un **ángulo central** de una circunferencia, es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

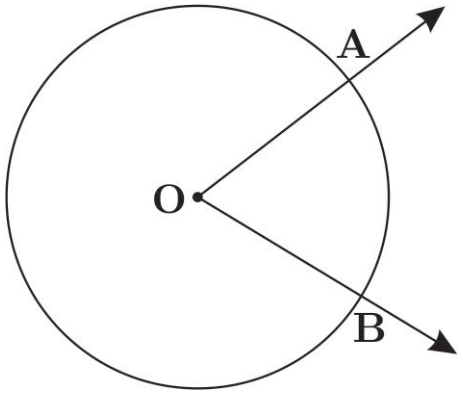


Figura 41.1

En la Figura 41.1,

O es el centro de la circunferencia y

$\angle AOB$ es un ángulo central.

Si A y B son puntos distintos de una circunferencia, se llama **arco intersecado** por el $\angle AOB$ al arco $\overset{\frown}{\text{AB}}$ en el interior de $\angle AOB$ y decimos que el $\angle AOB$ **interseca** al arco $\overset{\frown}{\text{AB}}$.

Si queremos trabajar con el arco exterior al $\angle AOB$, tomamos un punto cualquiera C de la circunferencia en el exterior de dicho ángulo y denotamos el arco como $\overset{\frown}{\text{ACB}}$.

La **medida en grados** de $\overset{\frown}{\text{AB}}$ es la medida en grados del ángulo central $\angle AOB$.

Dos **arcos son congruentes** si subtienden ángulos centrales congruentes.

Una cuerda menor que un diámetro de la circunferencia divide a la circunferencia en dos arcos no congruentes.

Si A y B son extremos de un diámetro, cada uno de los arcos $\overset{\frown}{\text{AB}}$ se llama **semicircunferencia**.

Un **ángulo inscrito** en una circunferencia es un ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

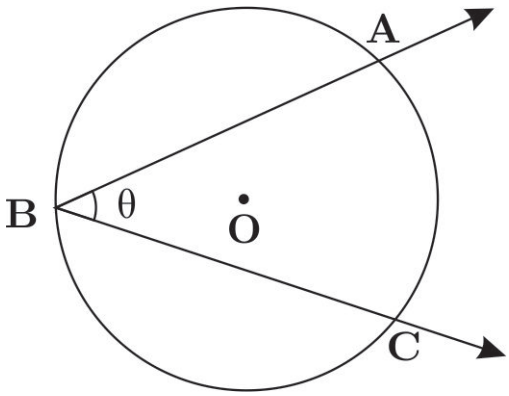


Figura 41.2

En la Figura 41.2, decimos que el ángulo $\angle\theta$ está inscrito en el arco $\overset{\frown}{\text{ABC}}$ e interseca al arco $\overset{\frown}{\text{AC}}$.

A continuación veremos algunos teoremas sobre la medida de un ángulo inscrito.

Teorema 41.1

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la medida del arco que interseca.

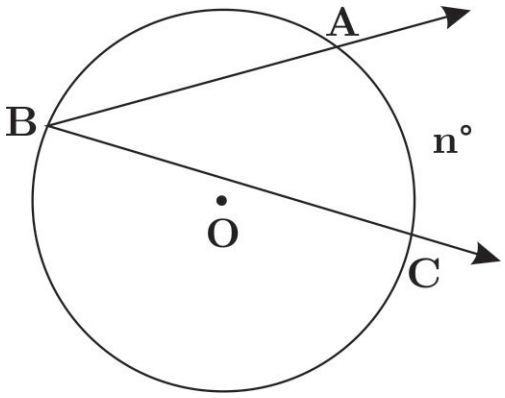


Figura 41.3

En la Figura 41.3,

$\angle ABC$ es un ángulo inscrito en el arco $\overset{\frown}{\text{ABC}}$ e interseca el arco $\overset{\frown}{\text{AC}}$.

Si $\overset{\frown}{\text{AC}} = \ n^\circ$ entonces $\angle ABC = \dfrac{1}{2}n^\circ$.

Nota 41.1

Este teorema también es válido si en lugar de dos rectas secantes que se cortan en la circunferencia, tenemos una recta tangente y una recta secante trazadas desde el punto de tangencia.

Corolario 41.1

Un ángulo cualquiera inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Prueba

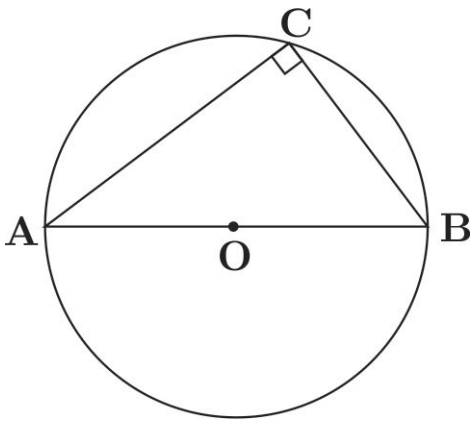


Figura 41.4

Consideramos el $\angle ACB$ inscrito en una semicircunferencia, como se muestra en la Figura 41.4.

Como $\angle AOB$ es llano, $\angle AOB = 180°$ y entonces la medida de $\overset{\frown}{\text{AB}}$ es $180°$.

Luego, $\angle ACB = \frac{1}{2}(180°) = 90°$.

Ejemplo 41.1

En la Figura 41.5,

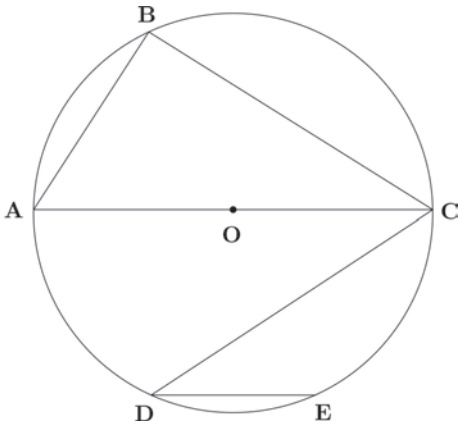


Figura 41.5

$\overline{AC}$ es diámetro de la circunferencia con centro en O,

$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ y la medida del arco $\overset{\frown}{\text{CE}}$ es $70°$.

Hallar las medidas de $\angle ACD$ y $\angle ABC$.

Solución

$\angle ACD \cong \angle CDE$ por ser alternos internos entre paralelas,

$\angle CDE = 35°$ por ser un ángulo inscrito que interseca un arco de medida $70°$.

Luego, $\angle ACD = 35°$.

Como $\angle ABC$ está inscrito en una semicircunferencia, entonces $\angle ABC = 90°$.

Por tanto, $\angle ACD = 35°$ y $\angle ABC = 90°$.

Ejemplo 41.2

En la Figura 41.6,

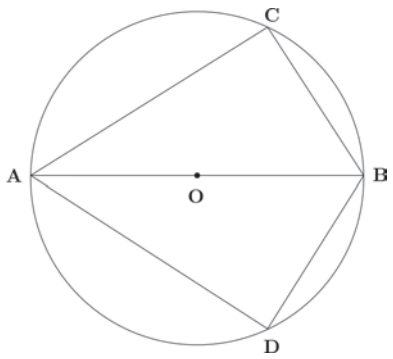


Figura 41.6

$\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia y

C y D son puntos de la misma en lados opuestos de $\overline{AB}$, tales que $\overline{BC} \cong \overline{BD}$.

Demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

Solución

Como $\overline{AB}$ es un diámetro, entonces $\angle C \cong \angle D$ y su medida es $90°$ por estar inscritos en semicircunferencias.

Aplicando el Teorema de Pitágoras

$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 - \left(\overline{BC}\right)^2$ y

$\left(\overline{AD}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 - \left(\overline{BD}\right)^2$

y como $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ por el criterio de congruencia L-L-L.

Ejemplo 41.3

En la Figura 41.7,

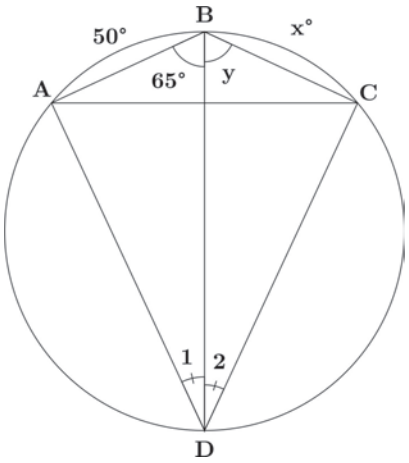


Figura 41.7

$\overline{BD}$ es un diámetro.

Hallar la medida de $\overset{\frown}{\text{BC}} = x$ y $\angle y$.

Solución

Como según la Figura 41.7, $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces el arco $\overset{\frown}{\text{AB}}$ es congruente con el arco $\overset{\frown}{\text{BC}}$.

Por tanto $x = 50°$.

Así $\angle 1$ y $\angle 2$ miden cada uno $25°$.

Como $\angle BCD$ es recto por estar inscrito en una semicircunferencia, en el $\triangle BCD$ tenemos

$\angle y + \angle BCD + \angle 2 = 180°$ por suma de ángulos interiores de un triángulo.

Entonces, $\angle y = 180° - \angle BCD - \angle 2 = 180° - 90° - 25° = 65°$.

Luego, $\overset{\frown}{\text{BC}} = x = 50°$ y $\angle y = 65°$.

Corolario 41.2

En una circunferencia los ángulos inscritos en el mismo arco son congruentes.

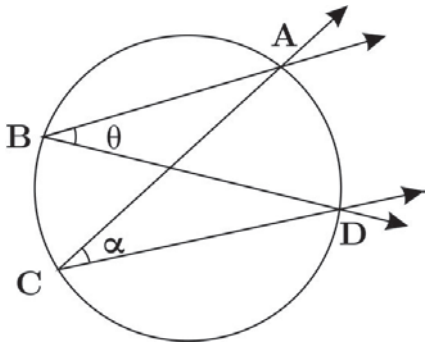


Figura 41.8

En la Figura 41.8, los ángulos $\angle\theta$ y $\angle\alpha$ están inscritos en el mismo arco $\overset{\frown}{\text{ABD}}$ y por tanto son congruentes por tener la misma medida, que es la mitad de la medida del arco intersecado $\overset{\frown}{\text{AD}}$.

Ejemplo 41.4

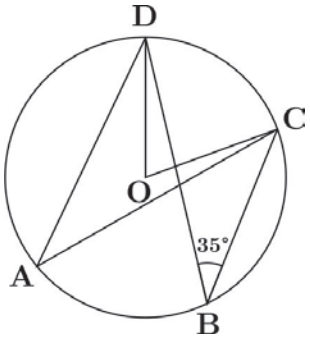


Figura 41.9

En la Figura 41.9,

O es el centro de la circunferencia.

Si $\angle DBC = 35°$,

encontrar las medidas de $\angle DAC$ y $\angle DOC$.

Solución

Como $\angle DAC \cong \angle DBC$ por ser ángulos inscritos en el mismo arco, entonces, $\angle DAC = 35°$.

El $\angle DBC$ interseca el arco $\overset{\frown}{\text{DC}}$ y como la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco intersecado, entonces la medida del arco $\overset{\frown}{\text{DC}}$ es $2(\angle DBC) = 2(35°) = 70°$.

El $\angle DOC$ es un ángulo central que interseca el arco $\overset{\frown}{\text{DC}}$ y por tanto su medida es igual a la medida del arco, es decir $\angle DOC = 70°$.

Luego, $\angle DAC = 35°$ y $\angle DOC = 70°$.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 41.10,

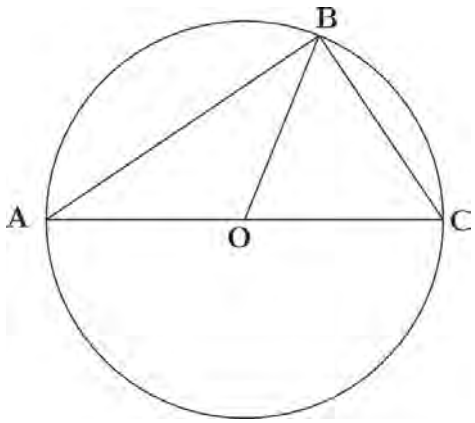


Figura 41.10

$\overline{AC}$ diámetro de la circunferencia de centro O y $\angle AOB = 112°$.

Hallar $\angle BAO$.

2. En la Figura 41.11,

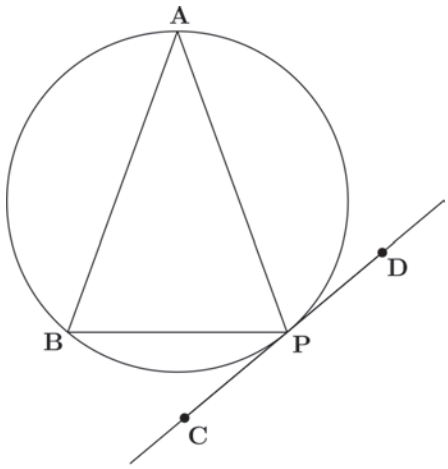


Figura 41.11

$\triangle BAP$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AP}$,

CD recta tangente a la circunferencia en P y $\overset{\frown}{\text{AP}} = 140°$.

Hallar $\angle BPC$.

3. En la Figura 41.12,

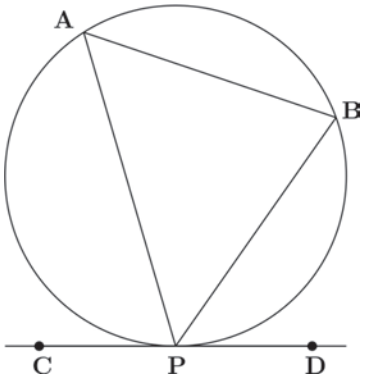


Figura 41.12

CD recta tangente a la circunferencia en P,
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 100°$ y $\angle ABP = 75°$.
Hallar $\angle BPD$.

Respuestas

1. 34°.
2. 40°.
3. 55°.

Lección 42

Otros ángulos en la circunferencia

En esta lección veremos otros ángulos en la circunferencia, sus medidas y las posiciones relativas de dos circunferencias.

Teorema 42.1

La medida de un ángulo formado por dos rectas secantes a una circunferencia, que se cortan en un punto del interior de la circunferencia, es igual a la semisuma de las medidas de los arcos intersecados por el ángulo y su opuesto por el vértice. Este ángulo se llama **ángulo interior**.

Prueba

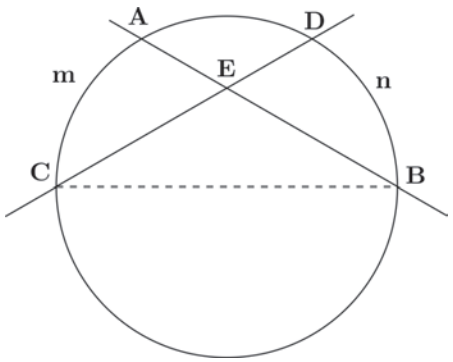


Figura 42.1

En la Figura 42.1,

AB y CD son rectas secantes a la circunferencia y E es el punto de corte.

Si $\overset{\frown}{\text{AC}} = m^\circ$ y $\overset{\frown}{\text{BD}} = n^\circ$, debemos probar que

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(m^\circ + n^\circ).$$

Trazamos $\overline{BC}$ como se muestra en la Figura 42.1.

$\angle ABC = \frac{1}{2}m^\circ$ y $\angle BCD = \frac{1}{2}n^\circ$ por ser ángulos inscritos en la circunferencia.

Como $\angle AEC = \angle ABC + \angle BCD$ porque un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él, entonces

$$\angle AEC = \frac{1}{2}m^\circ + \frac{1}{2}n^\circ = \frac{1}{2}(m^\circ + n^\circ).$$

Teorema 42.2

La medida de un ángulo formado por dos rectas secantes a una circunferencia, que se cortan en un punto exterior a la circunferencia, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos intersecados. Este ángulo se llama **ángulo exterior**.

Prueba

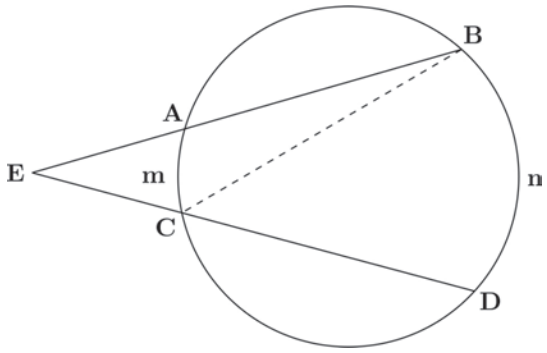


Figura 42.2

En la Figura 42.2,

AB y CD son dos rectas secantes a la circunferencia que se cortan en el punto E exterior a ella.

Si $\overset{\frown}{\text{AC}} = \ m^\circ$ y $\overset{\frown}{\text{BD}} = \ n^\circ$, debemos probar que

$$\angle BED = \frac{1}{2}(n^\circ - m^\circ).$$

Trazamos $\overline{BC}$ como se muestra en la Figura 42.2.

$\angle ABC = \frac{1}{2}m^\circ$ y $\angle BCD = \frac{1}{2}n^\circ$ por ser ángulos inscritos en la circunferencia.

$\angle BCD = \angle ABC + \angle BED$ porque un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él.

Luego, $\angle BED = \angle BCD - \angle ABC = \frac{1}{2}n^\circ - \frac{1}{2}m^\circ = \frac{1}{2}(n^\circ - m^\circ)$.

Ejemplo 42.1

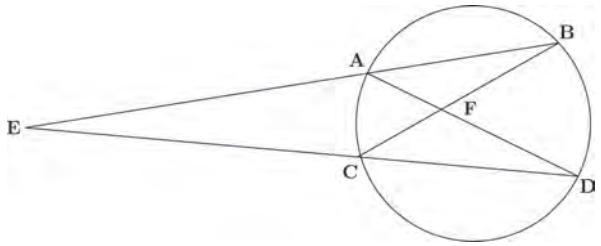


Figura 42.3

En la Figura 42.3,

$\overset{\frown}{\text{BD}} = \ 70^\circ$ y $\angle DFB = 4\angle E$.

Encontrar las medidas de $\overset{\frown}{\text{AC}}$ y $\angle E$.

Solución

Llamemos x la medida en grados de $\overset{\frown}{\text{AC}}$.

$\angle E = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\text{BD}} - \overset{\frown}{\text{AC}}) = \frac{1}{2}(70 - x)$, por el Teorema 42.2 y

$\angle DFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\text{BD}} + \overset{\frown}{\text{AC}}) = \frac{1}{2}(70 + x)$, por el Teorema 42.1.

Como $\angle DFB = 4\angle E$, entonces, $\frac{1}{2}(70 + x) = 4\frac{1}{2}(70 - x)$.

Resolvamos esta ecuación para x.

$$70 + x = 4(70 - x)$$

$$70 + x = 280 - 4x$$

$$5x = 210$$

$$x = 42.$$

Luego, $\angle E = \frac{1}{2}(70 - 42) = \left(\frac{1}{2}\right) 28 = 14.$

Por tanto, $\overset{\frown}{\text{AC}} = 42^{\text{o}}$ y $\angle E = 14^{\text{o}}$.

A continuación enunciaremos otros teoremas relacionados con ángulos en la circunferencia que no demostraremos, pero su prueba es similar a las anteriores.

Teorema 42.3

La medida de un ángulo formado por una recta secante y una recta tangente a una circunferencia, que se cortan en el exterior de la circunferencia, es igual a la diferencia de las medidas de los arcos intersecados.

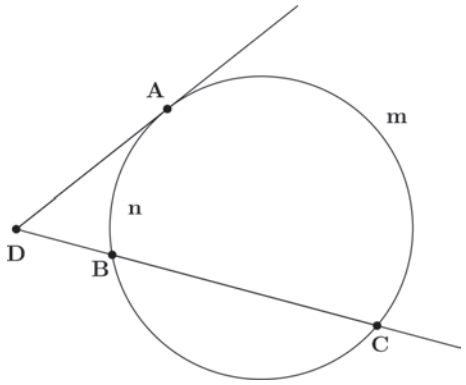


Figura 42.4

En la Figura 42.4,

DA es una recta tangente a la circunferencia, con punto de tangencia A,

CD es una recta secante a la circunferencia y D es el punto de corte de las dos rectas.

Si $\overset{\frown}{\text{AC}} = \ m^\circ$ y $\overset{\frown}{\text{AB}} = \ n^\circ$, debemos probar que

$\angle ADC = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ).$

La prueba de este teorema se deja como ejercicio para el lector.

Nota 42.1

Este teorema también es válido si las dos rectas son tangentes a la circunferencia.

Ejemplo 42.2

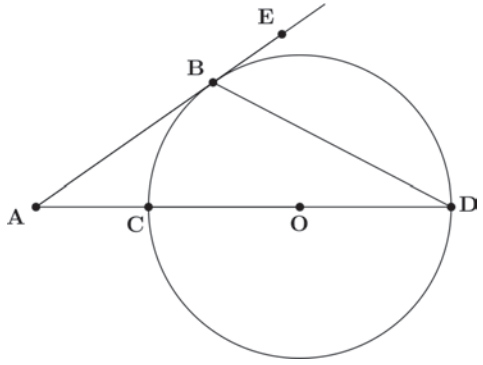


Figura 42.5

En la Figura 42.5,

AE es una recta tangente a la circunferencia, con punto de tangencia B

y CD es una recta secante a la circunferencia que pasa por O, centro de la circunferencia.

Si $\angle BAD = 35^{\text{o}}$, hallar las medidas de $\overset{\frown}{\text{BC}}$ y de $\angle EBD$.

Solución

Llamemos x la medida en grados de $\overset{\frown}{\text{BD}}$ y y la medida en grados de $\overset{\frown}{\text{BC}}$.

$$\angle BAD = \frac{1}{2}(x - y) = 35 \tag{42.1}$$

Como $\overline{CD}$ es un diámetro, entonces $x + y = 180$ o sea, $y = 180 - x$. Reemplazando este valor en 42.1 tenemos

$$\frac{1}{2}(x - 180 + x) = 35.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 125$ y $y = 55$.

Luego, $\angle EBD = \left(\frac{1}{2}\right)(125) = 62,5°$.

Por tanto, $\overset{\frown}{\text{BC}} = 55°$ y $\angle EBD = 62,5°$.

Teorema 42.4

Los segmentos de rectas tangentes a una circunferencia, trazados desde un mismo punto exterior a la circunferencia hasta el respectivo punto de tangencia, son congruentes.

Prueba

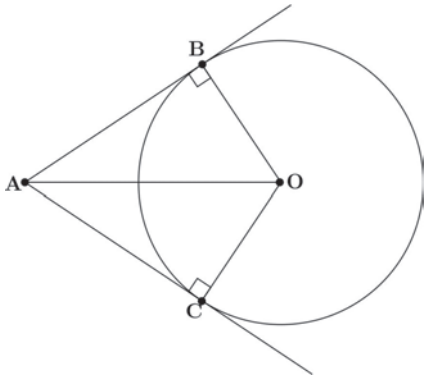


Figura 42.6

En la Figura 42.6,

AB y AC son rectas tangentes a la circunferencia de centro O.

B y C son los puntos de tangencia.

Debemos probar que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Trazamos $\overline{AO}$ y los radios a los puntos de tangencia $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$.

Como $\overline{OC} \cong \overline{OB}$ por ser radios de la circunferencia y $\angle ACO \cong \angle ABO$ por ser ángulos rectos entonces, $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ por criterio de congruencia de triángulos rectángulos. Por tanto $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Posiciones relativas de dos circunferencias

Consideremos dos circunferencias de un mismo plano, con centros en los puntos O y O' y radios R y r respectivamente, con R mayor que r. Decimos que las circunferencias son:

1. **Concéntricas**: cuando los centros coinciden.

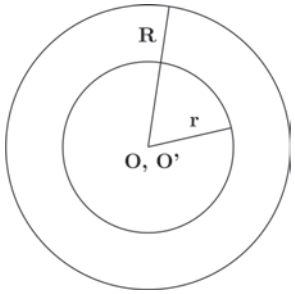


Figura 42.7

En la Figura 42.7,

las circunferencias con centro en O y O' son concéntricas.

2. **Interiores**: cuando todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra.

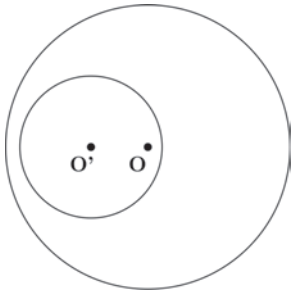


Figura 42.8

En la Figura 42.8,

las circunferencias con centros en O y O' son interiores.

Sus centros pueden o no coincidir.

3. **Exteriores**: cuando todos los puntos de una de las circunferencias son exteriores a la otra circunferencia.

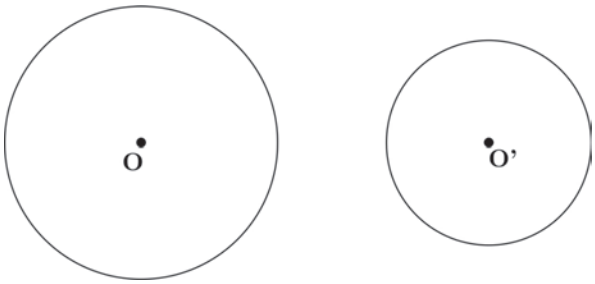


Figura 42.9

En la Figura 42.9,

las circunferencias con centros en O y O' son exteriores.

4. **Tangentes interiores**: cuando una de las circunferencias es interior a la otra y tienen un punto en común.

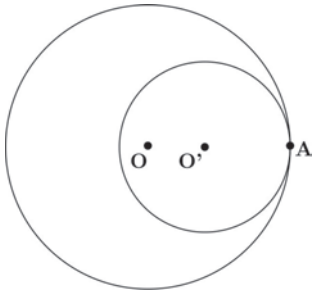


Figura 42.10

En la Figura 42.10,

las circunferencias con centros en O y O' son tangentes interiores y su punto común A es el punto de tangencia.

Los puntos O , O' y A son colineales.

5. **Tangentes exteriores**: cuando todos los puntos de una de las circunferencias son exteriores a la otra, excepto un punto, que es el punto de tangencia.

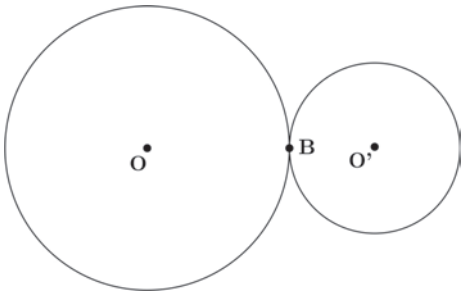


Figura 42.11

En la Figura 42.11,

las circunferencias con centros en O y O' son tangentes exteriores, con B el punto de tangencia.

Los puntos O , B y O' son colineales.

6. **Secantes**: cuando tienen dos puntos en común.

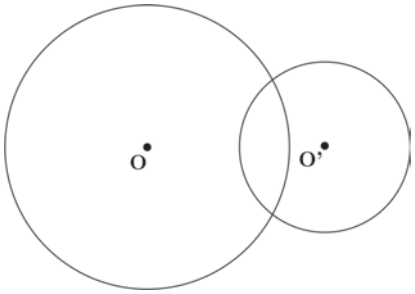


Figura 42.12

En la Figura 42.12,

las circunferencias con centros en O y O' son circunferencias secantes.

Ejercicios propuestos

1. En la Figura 42.13,

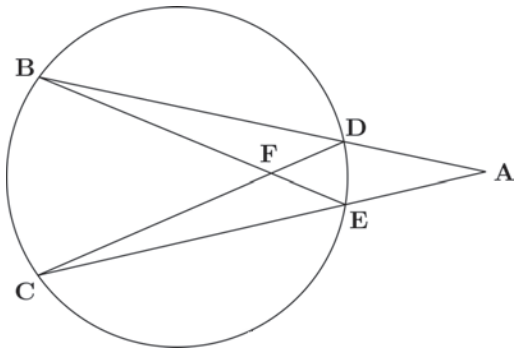


Figura 42.13

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son rectas secantes a la circunferencia,

$\angle A = 25°$ y $\angle BFC = 46°$.

Hallar las medidas de $\overset{\frown}{\text{BC}}$ y $\overset{\frown}{\text{DE}}$.

2. En la Figura 42.14,

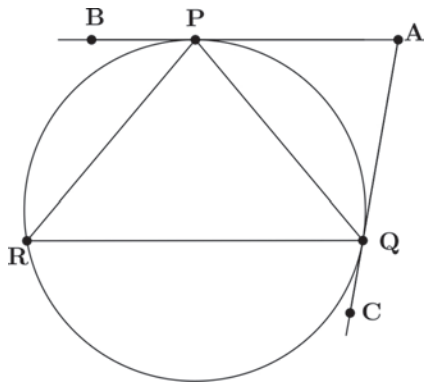


Figura 42.14

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son rectas tangentes a la circunferencia,

P y Q puntos de tangencia y

$\angle PRQ = 50°$ y $\angle RQC = 80°$.

Hallar las medidas de $\angle BPR$ y $\angle A$.

3. En la Figura 42.15,

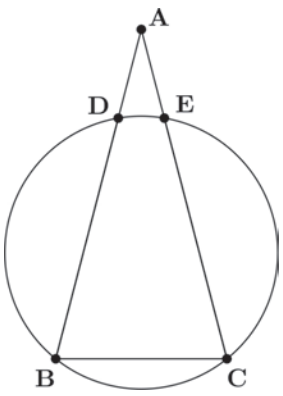


Figura 42.15

$\overset{\frown}{\text{BD}} \cong \overset{\frown}{\text{CE}}$.

Probar que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

4. En la Figura 42.16,

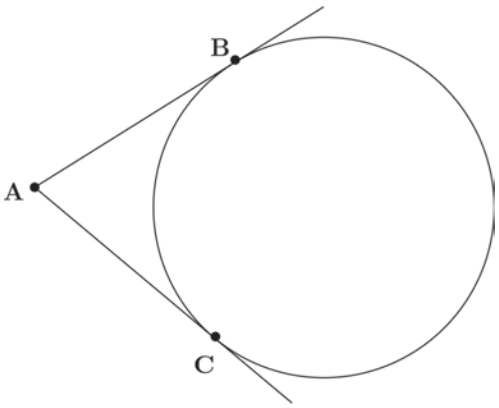


Figura 42.16

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son rectas tangentes a la circunferencia, con puntos de tangencia en B y C respectivamente.

Si $\angle BAC = 72^o$, ¿cuál es la medida de cada arco intersecado?

Respuestas

1. $\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 71°$, $\overset{\frown}{\mathrm{DE}} = 21°$.
2. $\angle BPR = 50°$, $\angle A = 80°$.
3. Ayuda: probar que $\angle ABC \cong \angle ACB$.
4. Arco mayor $252°$ y arco menor $108°$.

Lección 43

Polígonos inscritos y circunscritos

En esta lección veremos el concepto de polígono inscrito y de polígono circunscrito a una circunferencia y las propiedades que debe cumplir un polígono para poder ser inscrito o circunscrito a una circunferencia.

Si los vértices de un polígono son puntos que están en una circunferencia, se dice que el polígono es un **polígono inscrito** en la circunferencia y que la circunferencia es una **circunferencia circunscrita** al polígono.

Si todos los lados de un polígono son tangentes a una circunferencia, se dice que el polígono está **circunscrito** a la circunferencia y que la circunferencia está **inscrita** en el polígono.

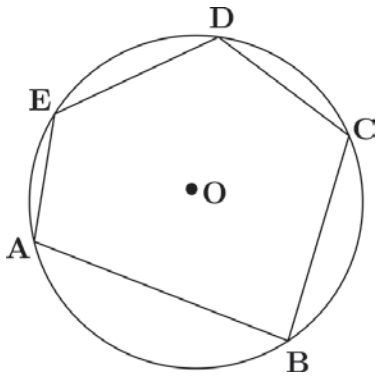


Figura 43.1

En la Figura 43.1,

O es el centro de la circunferencia y

$ABCDE$ es un polígono inscrito en ella.

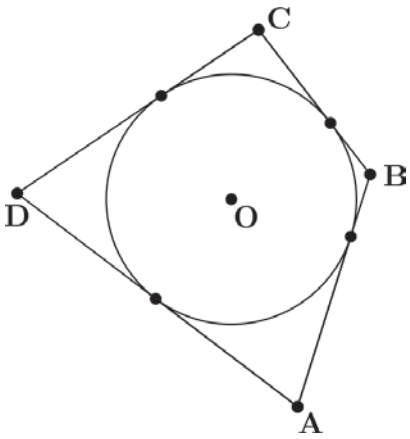


Figura 43.2

En la Figura 43.2,

O es el centro de la circunferencia y

$ABCD$ es un polígono circunscrito a ella.

No todo polígono se puede inscribir o circunscribir en una circunferencia. Los polígonos regulares siempre se pueden inscribir o circuncribir en una circunferencia y decimos que son **inscribibles** o **circunscribibles** en una circunferencia. En estos casos decimos que el centro de la circunferencia inscrita o circunscrita al polígono es el centro del polígono.

Para una mejor comprensión de este tema, veremos un teorema donde relacionamos los arcos y las cuerdas en una circunferencia.

Teorema 43.1

Dos arcos son congruentes si las cuerdas que los subtienden son congruentes.

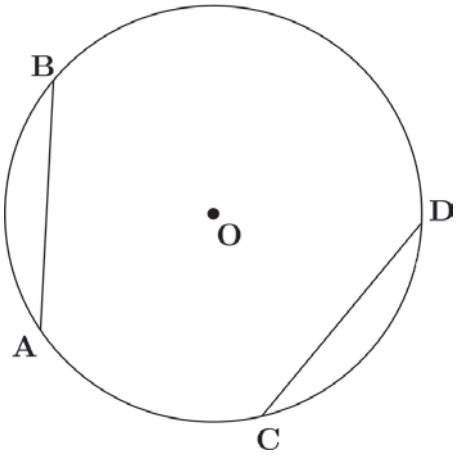


Figura 43.3

En la Figura 43.3,

O es el centro de la circunferencia y

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Entonces $\overset{\frown}{\text{AB}} \cong \overset{\frown}{\text{CD}}$.

Notas 43.1

1. El recíproco de este teorema también es válido, esto es, si dos cuerdas de una circunferencia son congruentes, los arcos subtendidos también son congruentes.
2. Sabemos que las mediatrices de los lados de un triángulo se intersecan en un único punto O que se conoce como **circuncentro** del triángulo. Este punto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y de ahí su nombre.
3. También vimos que las bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersecan en un mismo punto C que se conoce como **incentro** del triángulo. Este punto es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo y su nombre también está relacionado con la circunferencia.
4. Por tres puntos no colineales pasa una única circunferencia.

Por tanto, con base en 2. y 3., todo triángulo puede ser inscrito o circunscrito a una circunferencia.

Construcción 43.1

¿**Cómo trazar una circunferencia que pasa por tres puntos no colineales**?

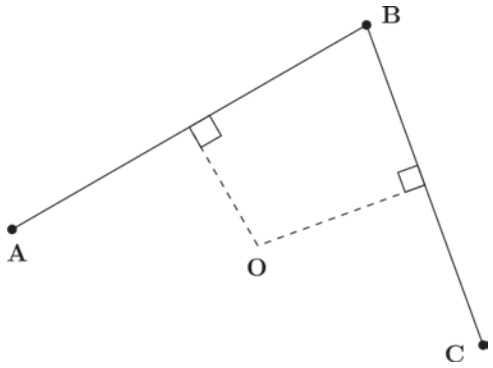


Figura 43.4

En la Figura 43.4,

A , B y C son tres puntos no colineales del plano.

Vamos a encontrar el centro de la circunferencia que pasa por estos puntos.

Trazamos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ y sus mediatrices, las cuales se cortan en O, como se muestra en la Figura 43.4

Este punto O es el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos, cuyo radio es $\overline{OA}$.

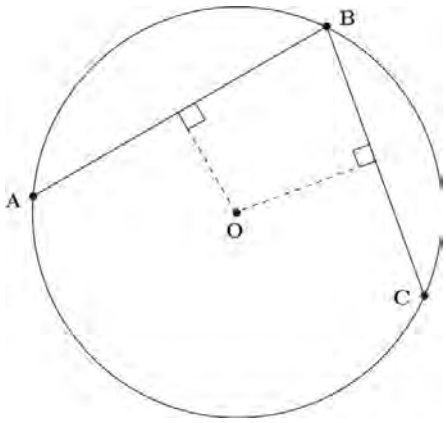


Figura 43.5

En la Figura 43.5,

se muestra la circunferencia de centro en O y radio $\overline{OA}$.

¿Qué pasa si se tienen más de tres puntos no colineales? Veamos el caso de cuatro puntos no colineales, que determinan un cuadrilátero convexo. El **cuadrilátero** es **inscribible** en una circunferencia si existe una circunferencia que pase por sus cuatro vértices.

A continuación veremos las condiciones que se requieren para que un cuadrilátero convexo sea incribible en una circunferencia.

Teorema 43.2

Si un cuadrilátero convexo está inscrito en una circunferencia, sus ángulos opuestos son suplementarios.

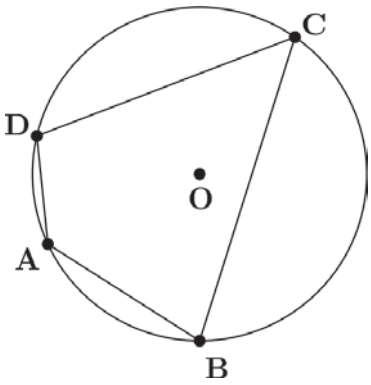


Figura 43.6

En la Figura 43.6,

$ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

Debemos probar que

$\angle A + \angle C = 180°$ y $\angle B + \angle D = 180°$.

Prueba

Como el cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en la circunferencia, entonces A , B , C y D son puntos de la circunferencia y sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ son cuerdas de la circunferencia.

Por tanto, $\angle A$, $\angle C$, $\angle B$ y $\angle D$ son ángulos inscritos en la circunferencia. Luego,

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\text{BCD}} \text{ y } \angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\text{BAD}}.$$

$$\angle B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\text{ADC}} \text{ y } \angle D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\text{ABC}}.$$

Por tanto,

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\text{BCD}} + \overset{\frown}{\text{BAD}}) = \frac{1}{2}(360°) = 180°$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\text{ADC}} + \overset{\frown}{\text{ABC}}) = \frac{1}{2}(360°) = 180°.$$

Luego, los ángulos opuestos del cuadrilátero son suplementarios.

El recíproco de este teorema también es válido, esto es, si los ángulos opuestos de un cuadrilátero convexo son suplementarios, entonces el cuadrilátero es inscribible en una circunferencia.

Ejemplo 43.1

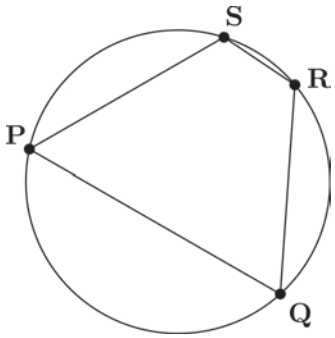


Figura 43.7

En la Figura 43.7,

$PQRS$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

Si $\angle P = 60°$ y $\overset{\frown}{\text{PSR}} = 128°$,

hallar $\angle Q$, $\angle R$ y $\angle S$.

Solución

Por el Teorema 43.2, $\angle P$ y $\angle R$ son suplementarios, por tanto $\angle P + \angle R = 180°$. Luego $\angle R = 180° - \angle P = 180° - 60° = 120°$.

Como $\overset{\frown}{\text{PSR}} + \overset{\frown}{\text{RQP}} = 360°$, entonces $\overset{\frown}{\text{RQP}} = 360° - \overset{\frown}{\text{PSR}} = 360° - 128° = 232°$. Luego, $\angle S = \frac{1}{2}\overset{\frown}{\text{RQP}} = \frac{1}{2}(232°) = 116°$.

Como $\angle S + \angle Q = 180°$, entonces $\angle Q = 180° - \angle S = 64°$.

Luego, $\angle S = 116°$, $\angle Q = 64°$ y $\angle R = 120°$.

¿Cómo inscribir o circuncribir un polígono regular en una circunferencia?

A continuación veremos dos teoremas que nos muestran cómo inscribir o circunscribir un polígono regular, de cualquier número de lados, en una circunferencia.

Teorema 43.3

Si una circunferencia se divide en arcos congruentes, la línea poligonal que une los extremos de los arcos determina un polígono regular inscrito en la circunferencia.

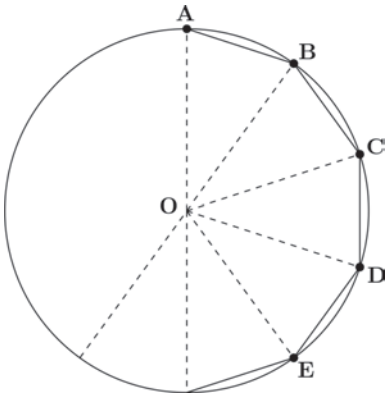


Figura 43.8

En la Figura 43.8,

O es el centro de una circunferencia de radio r.

Si A , B , C , D , E, ... son puntos de la circunferencia tales que $\overset{\frown}{\text{AB}} \cong \overset{\frown}{\text{BC}} \cong \overset{\frown}{\text{CD}} \cong \overset{\frown}{\text{DE}}$ ... ,

debemos demostrar que el polígono $ABCDE...$ es un polígono regular.

Prueba

Como los arcos son congruentes, entonces las cuerdas que los subtienden también son congruentes, es decir,

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong ...$

Como arcos congruentes determinan ángulos centrales congruentes,

$\angle AOB \cong \angle BOC \cong \angle COD \cong \angle DOE \cong ...$

Como $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong ...$ por ser radios de una misma circunferencia, entonces

$\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COD \cong \triangle DOE$ ... por criterio de congruencia L-A-L. Luego, los ángulos de las bases de los triángulos isósceles que forman los radios con las cuerdas también

son congruentes, y por tanto, los ángulos formados por las cuerdas son congruentes, o sea $\angle ABC \cong \angle BCD \cong \angle CDE \cong$ ... y estos son los ángulos interiores del polígono.

Entonces, el polígono $ABCDE...$ es regular, por tener sus lados y sus ángulos congruentes.

Teorema 43.4

Si una circunferencia se divide en arcos congruentes, los puntos de corte de las rectas tangentes en los extremos de los arcos, determinan un polígono regular circunscrito a la circunferencia.

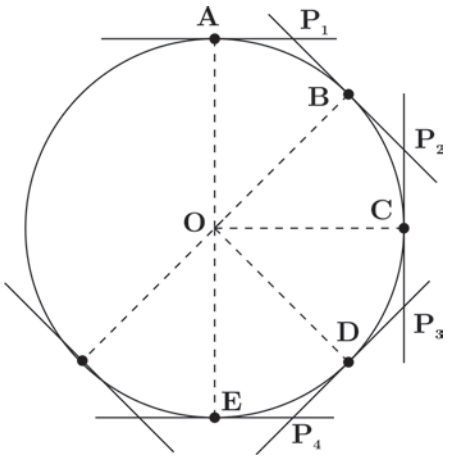


Figura 43.9

En la Figura 43.9,

O es el centro de una circunferencia de radio r.

A , B , C , D , E, ... son puntos de la circunferencia tales que $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{DE}$ ...

Si trazamos las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos A , B , C , D , E, ... que se cortan en P_1 , P_2 , P_3 , P_4, ... ,

debemos demostrar que el polígono $P_1P_2P_3P_4...$ es un polígono regular.

Prueba

Sabemos que los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a una circunferencia al punto de tangencia son congruentes. Por tanto,

$\overline{AP_1} \cong \overline{P_1B} \cong \overline{BP_2} \cong \overline{P_2C} \cong \overline{CP_3} \cong \overline{P_3D} \cong \overline{DP_4}$, ...

Como $\overline{P_1B} + \overline{BP_2} = \overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2C} + \overline{CP_3} = \overline{P_2P_3}$, ...

entonces,

$\overline{P_1P_2} \cong \overline{P_2P_3} \cong \overline{P_3P_4}$ ...

Por tanto, los triángulos isósceles son congruentes, es decir,

$\triangle AP_1B \cong \triangle BP_2C \cong \triangle CP_3D \cong \triangle DP_4E \cong$, ... por criterio de congruencia L-L-L.

Luego, los ángulos también son congruentes, o sea,

$\angle P_1 \cong \angle P_2 \cong \angle P_3 \cong \angle P_4$ ...

Luego, el polígono $P_1P_2P_3P_4...$ es regular, por tener sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

Ejemplo 43.2

Dibujar un cuadrado inscrito y uno circunscrito a una circunferencia.

Solución

Como el cuadrado es un polígono regular, el problema tiene solución. Debemos dividir la circunferencia en cuatro arcos congruentes y para ello trazamos dos diámetros perpendiculares entre sí, como se muestra en la Figura 43.10.

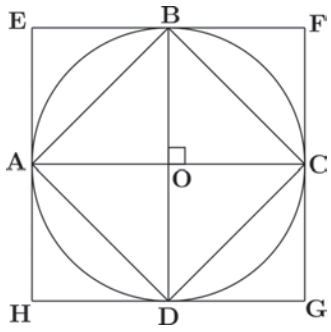


Figura 43.10

Como $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, los ángulos centrales son rectos y además $\overset{\frown}{\text{AB}} \cong \overset{\frown}{\text{BC}} \cong \overset{\frown}{\text{CD}} \cong \overset{\frown}{\text{DA}}$.

Por tanto, $ABCD$ es un cuadrado inscrito por tener los cuatro lados congruentes y sus diagonales también congruentes.

Para trazar el cuadrado circunscrito, trazamos rectas tangentes a la circunferencia en los puntos A , B , C y D que se cortan en los puntos E , F , G y H, y tenemos el cuadrado $EFGH$ circunscrito a la circunferencia.

Ejemplo 43.3

¿Cómo trazar un hexágono regular inscrito en una circunferencia?

Solución

Supongamos el ejercicio resuelto, y veamos el hexágono en la Figura 43.11.

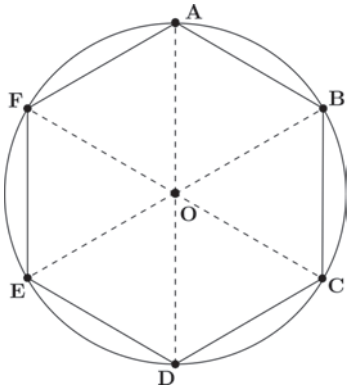


Figura 43.11

Si trazamos los radios a los vértices del hexágono, se forman seis triángulos isósceles congruentes.

Veamos el $\triangle AOB$: el ángulo del vértice mide 60^o porque la circunferencia está dividida en seis arcos congruentes, y cada uno mide 60^o. Como el triángulo es isósceles, los ángulos de la base son congruentes y por tanto, cada uno mide 60^o, o sea que el triángulo es equilátero y cada lado tiene la misma medida del radio.

Es decir, la medida del lado de un hexágono regular es igual al radio de la circunferencia en la cual está inscrito y para dibujarlo, abrimos el compás con una abertura igual al radio y marcamos puntos en la circunferencia con dicha medida. Al unir los puntos consecutivos tenemos el hexágono regular $ABCDEF$.

¿Qué polígono se forma si en lugar de unir los puntos consecutivamente, lo hacemos uniendo de dos en dos?

Ejercicios propuestos

1. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros se pueden inscribir en una circunferencia : rombo, trapecio rectángulo, trapecio isósceles, rectángulo, paralelogramo? Justificar la respuesta.
2. Dibujar un octágono regular inscrito en una circunferencia.
3. Dibujar un dodecágono regular circunscrito a una circunferencia.

Respuestas

1. Trapecio isósceles y rectángulo.
2. Ayuda: a partir del cuadrado inscrito, trazar las bisectrices de los ángulos formados por las diagonales.
3. Ayuda: iniciar con el hexágono regular inscrito.

Lección 44

Longitud de una circunferencia
Círculo y área de un círculo

En esta lección veremos cómo hallar la longitud de una circunferencia. Presentaremos además el concepto de círculo y la forma de calcular su área.

Longitud de una circunferencia

Sea O un punto de un plano dado y sea r un número real positivo.

Consideremos una circunferencia de centro O y radio r. Inscribamos un polígono regular de n lados en la circunferencia y empecemos a aumentar el número de lados del polígono, como se observa en la Figura 44.1.

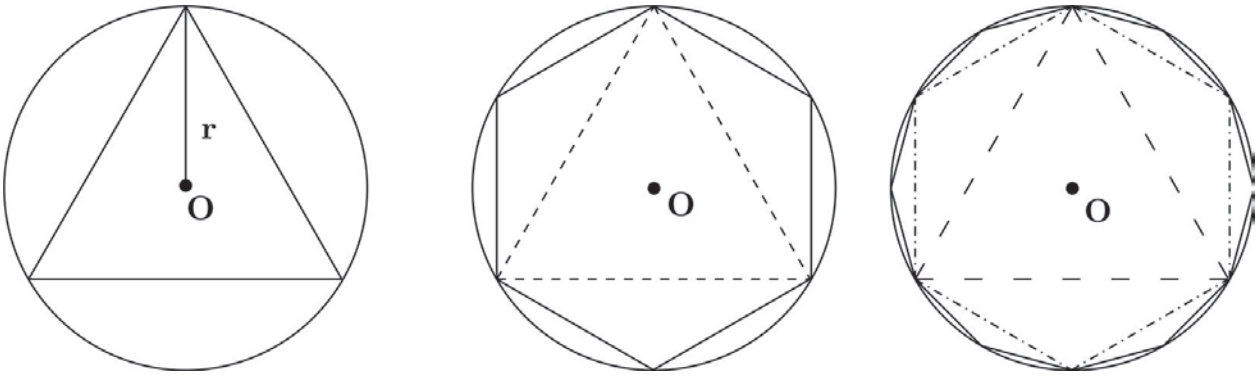


Figura 44.1

Al incrementar el número de lados del polígono regular inscrito observamos que la línea poligonal cerrada se va aproximando a la forma de la circunferencia circunscrita, y su perímetro, a medida que n aumenta, va aumentando y se va aproximando a un número fijo.

Si consideramos la misma circunferencia y circunscribimos un polígono regular de n lados y de nuevo empezamos a aumentar el número de lados del polígono circunscrito, como se observa en la Figura 44.2, vemos que a medida que n aumenta la línea poligonal cerrada se va acercando cada vez a la forma de la circunferencia inscrita y su perímetro va disminuyendo y acercándose al mismo número fijo.

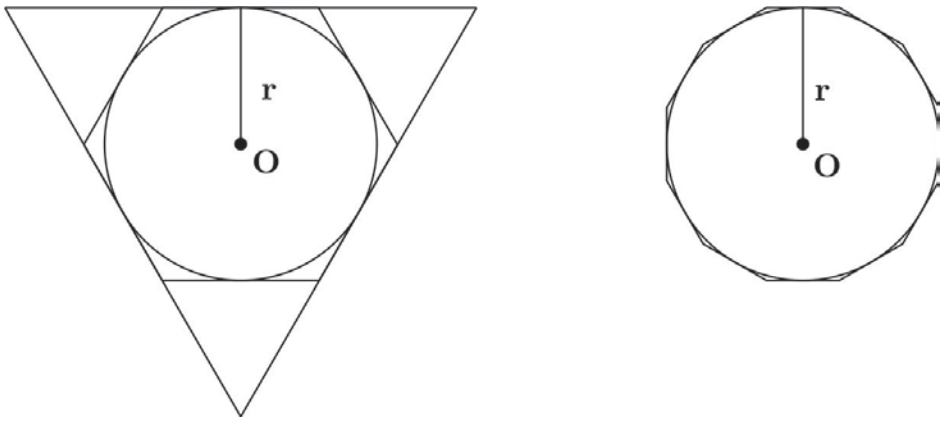


Figura 44.2

Decimos que la **longitud de la circunferencia** es el número al que se aproximan los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a ella cuando se incrementa indefinidamente el número de sus lados.

Si denotamos por L la longitud de la circunferencia y por d su diámetro, el siguiente resultado nos permite hallar una fórmula para calcular L.

La razón entre la longitud L de una circunferencia y su diámetro d es la misma para todas las circunferencias. Esto es, si tenemos dos circunferencias cualesquiera de longitudes L y L' y diámetros d y d' respectivamente, como se muestra en la Figura 44.3,

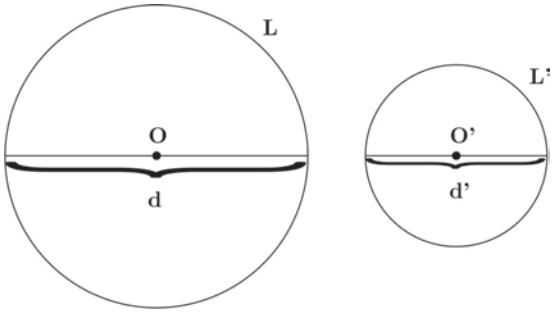


Figura 44.3

$$\frac{L}{d} = \frac{L'}{d'}.$$

La razón $\dfrac{L}{d}$ es un número constante igual al número π.

$$\frac{L}{d} = \pi.$$

Puesto que π es un número irracional, $\pi = 3,141592653...$, la longitud de cualquier circunferencia es también un número irracional. Es costumbre expresar, por precisión, la longitud de la circunferencia en términos de π y no en términos de un valor aproximado de π.

Círculo

Dada una circunferencia de centro O y radio r, llamamos **círculo** de centro O y radio r a la porción del plano limitada por la circunferencia, incluida ésta. Es decir, el círculo con centro en O y radio r está formado por todos los puntos del plano que están en la circunferencia y los puntos interiores a ella.

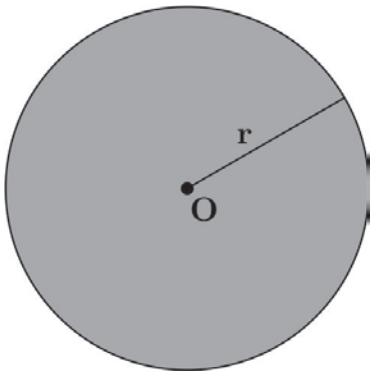


Figura 44.4

Para hallar el área de un círculo de centro O y radio r, consideremos un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro O y radio r. La distancia de O a cada lado del polígono se llama **apotema** del polígono y la denotamos por a.

Si trazamos los radios de la circunferencia a cada vértice del polígono inscrito, éste queda dividido en n triángulos que tienen como base el lado del polígono y como altura a, como se muestra en la Figura 44.5.

Si los lados del polígono regular tienen como medida l, el área del polígono es:

$$\begin{aligned}
A_{ABCDEFGH} &= A_{\triangle AOB} + A_{\triangle BOC} + A_{\triangle COD} + \cdots + A_{\triangle HOA} \\
&= \frac{1}{2}\overline{AB}a + \frac{1}{2}\overline{BC}a + \frac{1}{2}\overline{CD}a + \cdots + \frac{1}{2}\overline{HA}a \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots \overline{HA}}_{\text{Perímetro del polígono}}\right)a \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{l + l + \cdots + l}_{n \text{ veces}}\right)a \\
&= \frac{1}{2}(nl)\,a \\
&= \frac{1}{2}P_{ABCDEFGH}a.
\end{aligned}$$

Como observamos en la Figura 44.5, a medida que aumentamos el número de lados del polígono inscrito, vemos que a se va aproximando a r, $P_{ABCDFGH}$ se va aproximando a la

longitud L de la circunferencia y la región del plano limitada por el polígono se va acercando cada vez más a la región encerrada por la circunferencia.

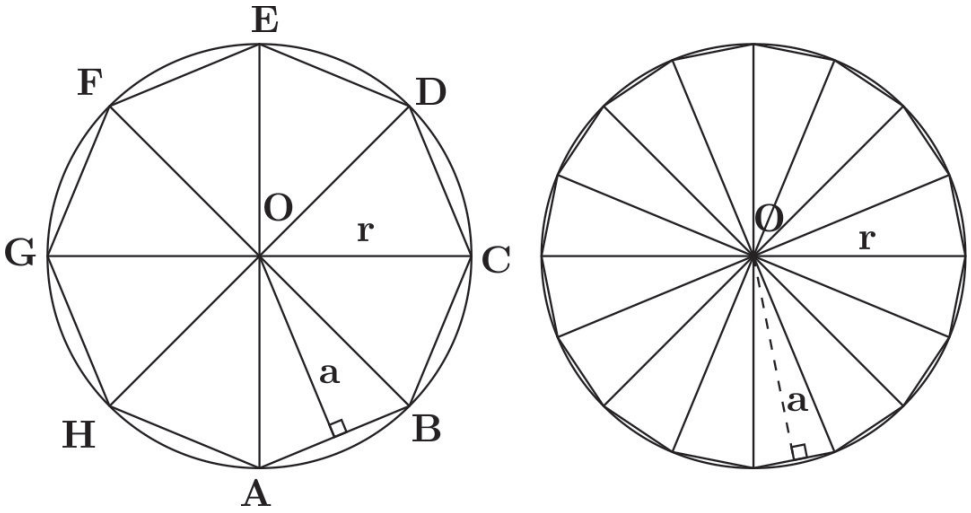


Figura 44.5

De manera similar, si consideramos un polígono de n lados circunscrito a la circunferencia y aumentamos el número de sus lados, como se observa en la Figura 44.6, la región encerrada por el polígono va disminuyendo a medida que n aumenta y se va aproximando a la región encerrada por el círculo.

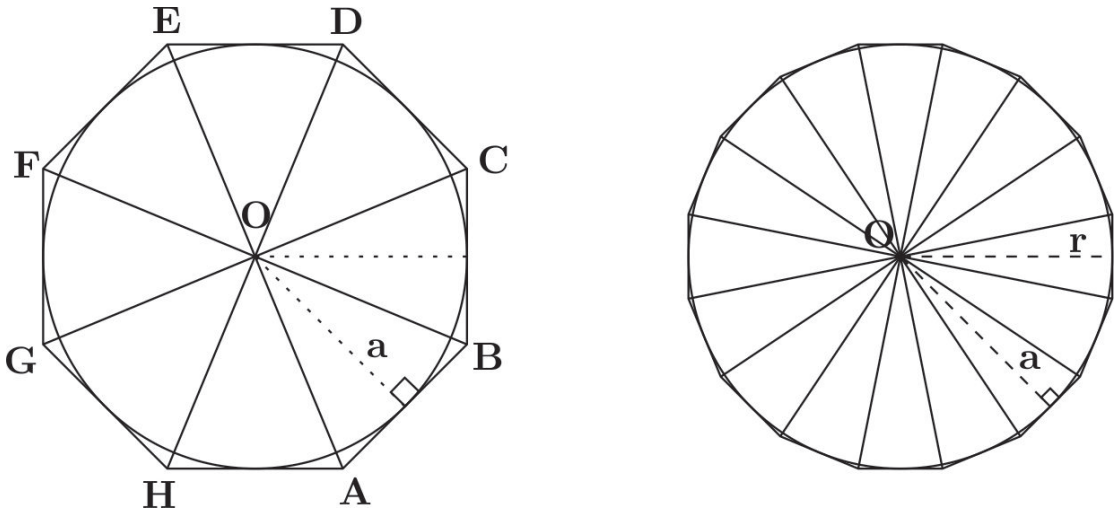


Figura 44.6

Decimos entonces que el **área del círculo**, que denotaremos A, es el número real al que se aproximan las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a ella cuando se incrementa indefinidamente el número de sus lados. Esto es, $A = \frac{1}{2}Lr$.
Como $L = 2\pi r$, entonces

$$A = \frac{1}{2}Lr = \frac{1}{2}(2\pi r)\, r = \pi r^2.$$

Ejemplo 44.1

En una circunferencia de radio 4 cm inscribir un cuadrado.

1. Hallar el perímetro y el área del cuadrado inscrito en la circunferencia.
2. Hallar la longitud de la circunferencia y el área del círculo.
3. Hallar el área de la región contenida en el círculo y fuera del cuadrado inscrito.

Solución

Con el compás trazamos la circunferencia de centro O y $r = 4$ y dos de sus diámetros que sean perpendiculares entre sí, para obtener cuatro arcos congruentes sobre la circunferencia. Llamamos A, B, C y D los puntos obtenidos sobre la circunferencia y los unimos en forma consecutiva, obteniendo así el cuadrado $ABCD$ inscrito en la circunferencia, como se muestra en la Figura 44.7.

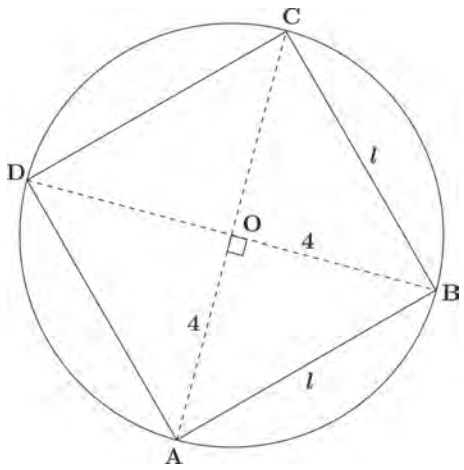


Figura 44.7

1. Llamemos l la medida del lado del cuadrado.

   Como el $\triangle AOB$ es rectángulo, por Teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{OA}\right)^2 + \left(\overline{OB}\right)^2$$
$$l^2 = 4^2 + 4^2$$
$$l^2 = 2(4^2)$$
$$l = 4\sqrt{2}.$$

   Luego, el perímetro del cuadrado inscrito es $P_{ABCD} = 4l = 4(4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}\ cm$ y su área es $A_{ABCD} = l^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\ cm^2$.

2. La longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r = 2\pi(4) = 8\pi\ cm$ y el área del círculo es

$$A = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi\ cm^2.$$

3.

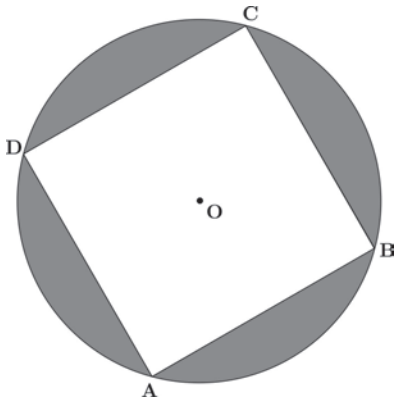


Figura 44.8

El área de la región contenida en el círculo y fuera del cuadrado inscrito es la región sombreada en la Figura 44.8.

Si llamamos A' su área, entonces

$$\begin{aligned} A' &= A - A_{ABCD} \\ &= 16\pi - 32 \\ &= 16(\pi - 2)\ cm^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 44.2

En cada numeral, hallar el área del círculo en términos de π si:

1. El radio es $3\,cm$.
2. El diámetro es $10\,cm$.
3. La longitud de la circunferencia es de $16\pi\,cm$.

Solución

En cada numeral, llamemos A el área de círculo.

1. El área del círculo con $r = 3$ es $A = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi\ cm^2$.
2. Como el diámetro es $10\ cm$, el valor del radio es la mitad o sea $r = 5\ cm$, y así $A = \pi(5)^2 = 25\pi\ cm^2$.
3. Para hallar el área del círculo debemos encontrar el radio de la circunferencia. Como $L = 16\pi$ y $L = 2\pi r$ entonces $16\pi = 2\pi r$, es decir, $r = 8\,cm$.

   Luego, el área del círculo es $A = \pi(8)^2 = 64\pi\,cm^2$.

Ejercicios propuestos

1.

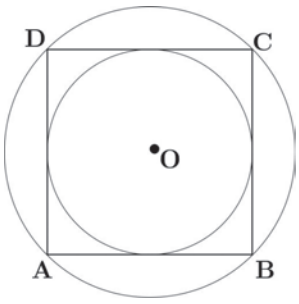


Figura 44.9

En la Figura 44.9, si el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide $4\ cm$, hallar:

(a) El área A_1 del círculo inscrito en el cuadrado.

(b) El área A_2 del círculo circunscrito al cuadrado.

2.

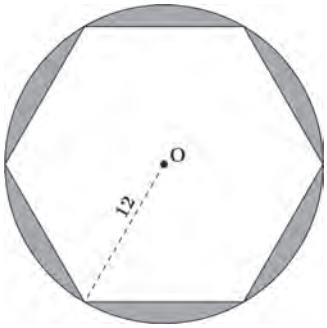


Figura 44.10

En la Figura 44.10,

hallar el área A de la región sombreada, si el radio del círculo circunscrito al hexágono es 12 cm.

3. La base de un tanque de forma cilíndrica es una circunferencia cuya longitud es 10 m. Si el tanque está rodeado por una malla circular situada a 2 m de la base del tanque, hallar la longitud L de la malla en términos de π.

Respuestas

1. (a) $4\pi\ cm^2$.

   (b) $8\pi\ cm^2$.

2. $L = 72(2\pi - 3\sqrt{3})\ cm$.

   Ayuda: recordar que el lado del hexágono regular inscrito es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

3. $L = (10 + 4\pi)\ m$.

   Ayuda: la circunferencia determinada por la malla tiene el mismo centro que la circunferencia determinada por la base.

Lección 45

Sector circular, segmento circular y corona circular

En esta lección veremos los conceptos de segmento circular, sector circular y corona circular. Además mostraremos ejemplos calculando el área de algunas de estas regiones del plano, a partir del área del círculo.

Sector circular

Es la porción de un círculo limitada por un ángulo central y el arco intersecado por él.

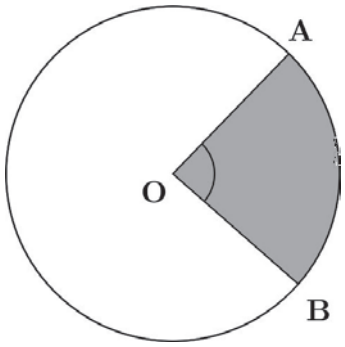


Figura 45.1

En la Figura 45.1, si $\angle AOB$ es un ángulo central y $\overset{\frown}{\text{AB}}$ es el arco intersecado por el $\angle AOB$, AOB es el sector circular correspondiente.

El área de un sector circular es proporcional a la medida del ángulo central.

El área de un círculo de radio r es πr^2 y corresponde a un ángulo central de $360°$.

Si, por ejemplo, tenemos una circunferencia de radio $r = 1$, el área del círculo correspondiente es $\pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi$. Si queremos hallar el área de un sector de dicho círculo cuyo ángulo central mide $60°$, como $60° = \frac{1}{6}(360°)$, entonces

$$\text{área del sector circular} = \frac{1}{6}(\text{área del círculo}) = \frac{1}{6}(\pi) = \frac{\pi}{6}.$$

Veamos un ejemplo en el que aplicamos este concepto.

Ejemplo 45.1

Hallar, en términos de π, el área de cada uno de los sectores circulares de la Figura 45.2.

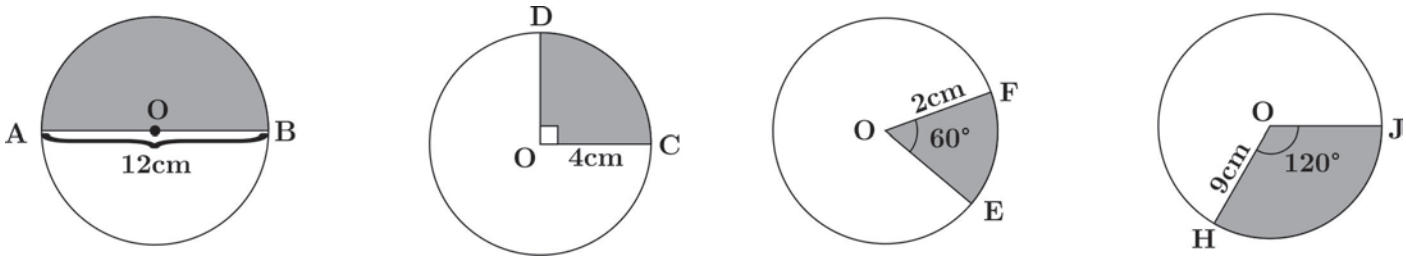


Figura 45.2

Solución

Como el ángulo central $\angle AOB$ es un ángulo llano y $180° = \frac{1}{2}(360°)$, el área del sector circular AOB es igual a la mitad del área del círculo de radio $r = 12/2 = 6\ cm$, esto es,

$$\text{área del sector circular } AOB = \frac{1}{2}\left(\pi r^2\right) = \frac{1}{2}\left(\pi\left(6^2\right)\right) = \frac{36}{2}\pi = 18\pi\ cm^2.$$

Como el ángulo central es $\angle COD = 90°$ y $90° = \frac{1}{4}(360°)$, el área del sector circular COD es igual a una cuarta parte del área del círculo con $r = 4\ cm$. Luego,

$$\text{área del sector circular } COD = \frac{1}{4}\left(\pi r^2\right) = \frac{1}{4}\left(\pi\ (4^2)\right) = \frac{16}{4}\pi = 4\pi\ cm^2.$$

Como el ángulo central es $\angle FOD = 60°$ y $60° = \frac{1}{6}(360°)$, el sector circular FOD corresponde a $1/6$ del círculo de $r = 2\ cm$, esto es,

$$\text{área del sector circular } FOD = \frac{1}{6}\left(\pi r^2\right) = \frac{1}{6}\left(\pi(2^2)\right) = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi = \frac{2\pi}{3}\ cm^2.$$

Como el ángulo central es $\angle HOJ = 120°$ y $120° = \frac{1}{3}(360°)$, el sector circular HOJ corresponde a $1/3$ del círculo de $r = 9\ cm$, esto es,

$$\text{área del sector circular } HOJ = \frac{1}{3}\left(\pi r^2\right) = \frac{1}{3}\left(\pi(9^2)\right) = \frac{81}{3}\pi = 27\pi\ cm^2.$$

Segmento Circular

Es la porción de un círculo limitada por una cuerda y el arco subtendido por ella.

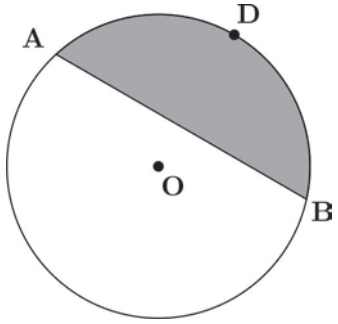
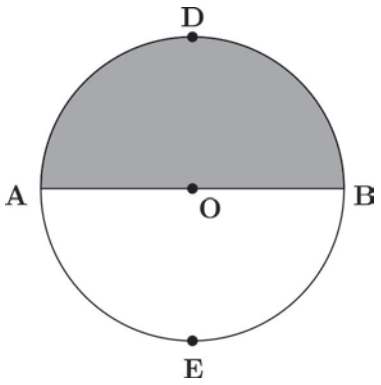


Figura 45.3

En la Figura 45.3, si $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia y $\overset{\frown}{\text{AB}}$ es el arco subtendido por $\overline{AB}$, ADB es el segmento circular correspondiente.

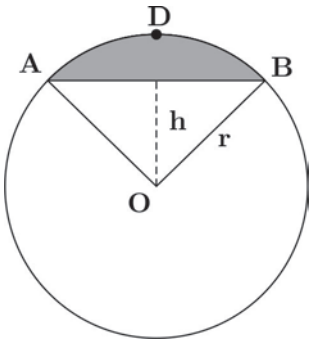
Si la cuerda es un diámetro, el segmento circular se llama **semicírculo**. Un diámetro de una circunferencia divide al círculo en dos semicírculos.



En la Figura 45.4,
$\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia
con centro en O y ADB y AEB son
semicírculos.

Figura 45.4

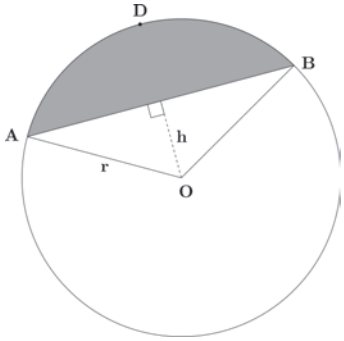
En la Figura 45.5, vemos que el área de un segmento circular ADB es igual al área del sector circular $OADB$ menos el área del $\triangle AOB$.



Área del segmento circular $ADB =$
área del sector circular $OADB -$ área del $\triangle AOB$

Figura 45.5

Ejemplo 45.2



En la Figura 45.6, si
la circunferencia de centro O
tiene radio $r = 6\ cm$,
$\angle AOB = 120°$ y la cuerda $\overline{AB} = 6\sqrt{3}\ cm$,
hallar el área del segmento circular ADB.

Figura 45.6

Solución

El área del segmento circular ADB es igual al área del sector circular $OADB$ menos el área del $\triangle AOB$.

$$A_{\text{segmento } ADB} = A_{\text{sector } OADB} - A_{\triangle AOB}.$$

Como el ángulo central $\angle AOB = 120°$, el área del sector circular $OADB$ es

$$A_{\text{sector } OADB} = \frac{1}{3}\left(\pi(6^2)\right) = \frac{36}{3}\pi = 12\pi \ cm^2.$$

Para hallar el área del $\triangle AOB$ debemos hallar primero su altura h. Como el $\triangle AOB$ es isósceles, la altura $h = \overline{OC}$ trazada a la base $\overline{AB}$ del triángulo es también mediana y por lo tanto, $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(6\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$. Luego, por Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\overline{AO}\right)^2 - \left(\overline{AC}\right)^2 \\ &= 6^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 36 - 27 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Por tanto, $h = 3$ y así

$$A_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(\overline{AB})h = \frac{1}{2}(6\sqrt{3})(3) = \frac{18}{2}\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \ cm^2.$$

Luego,

$$A_{\text{segmento } ADB} = 12\pi - 9\sqrt{3} = 3\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \ cm^2.$$

Ejemplo 45.3

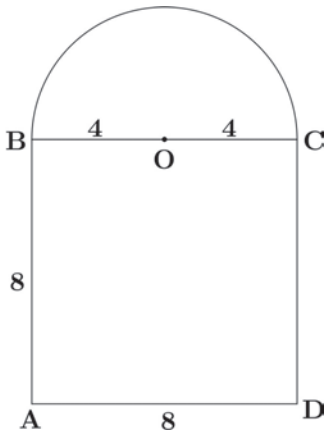


Figura 45.7

En la Figura 45.7 se muestra una ventana, formada por un cuadrado y coronada por un semicírculo.
Hallar su área.

Solución

Para calcular el área de la ventana hallamos primero el área del cuadrado, luego el área del semicírculo y finalmente sumamos estos dos resultados.

Llamemos l el lado del cuadrado y r el radio del semicírculo.

Como $r = \dfrac{l}{2}$, entonces el área del cuadrado es $l^2 = 8^2 = 64 \ cm^2$ y el área del semicírculo es $\dfrac{1}{2}\pi r^2 = \dfrac{1}{2}\pi(4)^2 = 8\pi \ cm^2$.

Luego, el área de la ventana es $(64 + 8\pi)\ cm^2$.

Corona circular

Es la porción de un plano limitada por dos circunferencias concéntricas.

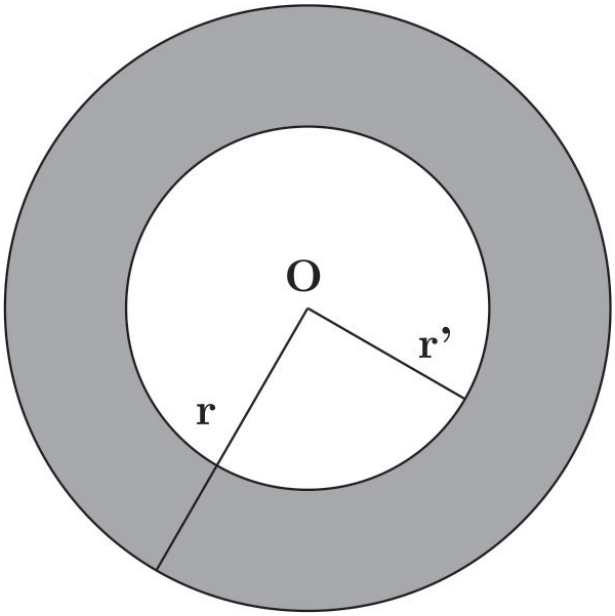


Figura 45.8

El área de una corona circular es igual a la diferencia entre las áreas de los dos círculos, como se observa en la Figura 45.8. Luego,

$$\text{Área de corona circular } = \pi r^2 - \pi r' = \pi\left(r^2 - r'\right).$$

Ejemplo 45.4

La base de un tanque de forma cilíndrica es una circunferencia cuya longitud es 10 m. El tanque está rodeado por una malla circular situada a 2 m de la base del tanque. Si la circunferencia determinada por la malla y la circunferencia determinada por la base son concéntricas, hallar el área del terreno ubicado entre la base del tanque y la malla.

Solución

En un ejercicio propuesto en la lección anterior encontramos que la longitud de la malla, que llamaremos L_m, es $L_m = (10 + 4\pi)\ m$.

Si llamamos L_t la longitud de la circunferencia de la base del tanque, $L_t = 10\ m$.

Si r_m es el radio de la circunferencia de la malla y r_t es el radio de la circunferencia del tanque, entonces $r_m = r_t + 2$.

Como el terreno ubicado entre el tanque y la malla es una corona circular, si llamamos A_T el área del terreno, A_t el área del círculo del tanque y A_m el área del círculo de la malla, entonces

$$A_T = A_m - A_t \tag{45.1}$$

Ahora,

$$A_m = \frac{1}{2} L_m r_m = \frac{1}{2}(10 + 4\pi)(r_t + 2)$$

y como $L_t = 2\pi r_t$ y $L_t = 10$ entonces

$$r_t = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}\ m.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{2}\left(10 + 4\pi\right)\left(\frac{5}{\pi} + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[2\left(5 + 2\pi\right)\right]\left[\frac{1}{\pi}\left(5 + 2\pi\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left(5 + 2\pi\right)\left(5 + 2\pi\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(5 + 2\pi\right)^2. \end{aligned} \tag{45.2}$$

Además,

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{1}{2} L_t r_t \\ &= \frac{1}{2}(10)\left(\frac{5}{\pi}\right) \\ &= \frac{25}{\pi}. \end{aligned} \tag{45.3}$$

Reemplazando 45.2 y 45.3 en 45.1 tenemos

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{\pi}\left(5 + 2\pi\right)^2 - \frac{25}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(25 + 20\pi + 4\pi^2 - 25\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(20\pi + 4\pi^2\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[4\pi\left(5 + \pi\right)\right] \\ &= 4\left(5 + \pi\right). \end{aligned}$$

Luego, el área del terreno ubicado entre la base del tanque y la malla es

$$4\left(5 + \pi\right)\ m^2.$$

Ejemplo 45.5

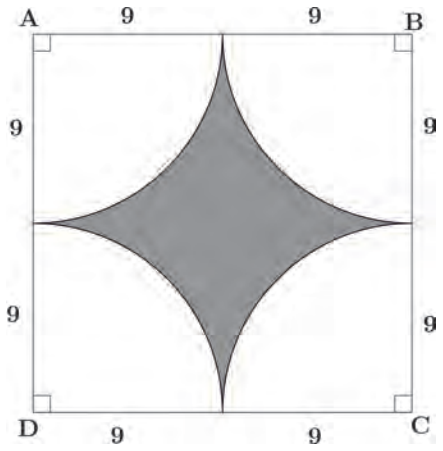


Figura 45.9

En la Figura 45.9,
$ABCD$ es un cuadrado,
los arcos tienen centro en A, B, C y D
y radio $9\,cm$.
Calcular el área sombreada.

Solución

El área sombreada es igual al área del cuadrado menos el área de las cuatro partes de círculo trazadas.

Como cada una de ellas se trazó desde un vértice con ángulo recto, entonces cada una es una cuarta parte del círculo y como son cuatro, son equivalentes a un círculo de radio $9\,cm$. Luego, el área del cuadrado es

$$(18)^2 = 324\,cm^2,$$

el área del círculo es

$$\pi(9)^2 = 81\pi\,cm^2.$$

Por tanto, el área sombreada es $(324 - 81\pi)\ cm^2$.

Ejemplo 45.6

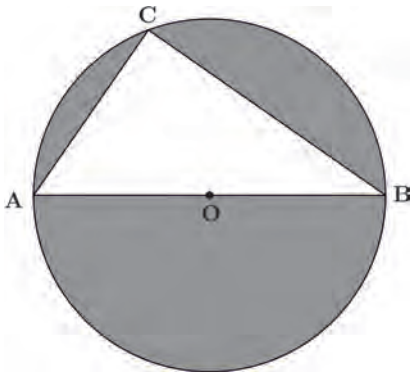


Figura 45.10

En la Figura 45.10,
$\overline{AB}$ es un diámetro,
$\overline{AC} = 12$ y $\overline{CB} = 16$.
Calcular el área sombreada.

Solución

El $\triangle ACB$ es rectángulo con $\angle C$ recto, por estar inscrito en una semicircunferencia.

El área sombreada es igual al área del círculo menos el área del triángulo.

Para hallar el diámetro $\overline{AB}$ aplicamos el Teorema de Pitágoras

$$\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{AC}\right)^2 + \left(\overline{CB}\right)^2 = (12)^2 + (16)^2 = 400.$$

Entonces $\overline{AB} = 20$ y como el radio r es $\frac{1}{2}\overline{AB}$, $r = 10$.

Luego, el área del círculo es

$$\pi(10)^2 = 100\pi\, cm^2,$$

el área del triángulo es

$$\frac{(12)(16)}{2} = 96\, cm^2.$$

Por tanto, el área sombreada es $(100\pi - 96)\ cm^2$.

Ejemplo 45.7

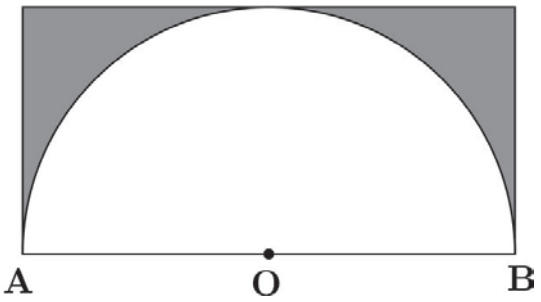


Figura 45.11

En la Figura 45.11,
$\overline{AB}$ es un diámetro
y $\overline{AB} = 16\ cm$.
Calcular el área sombreada.

Solución

El área sombreada es igual al área del rectángulo menos el área del semicírculo.

Como la altura del rectángulo es el radio del semicírculo, que a su vez es la mitad del diámetro, es decir 8 cm, entonces el área del rectángulo es

$$b \cdot h = 16 \cdot 8 = 128\, cm^2,$$

el área del semicírculo es

$$\frac{1}{2}\pi(r)^2 = \frac{1}{2}\pi(8)^2 = 32\pi\, cm^2.$$

Luego, el área sombreada es $(128 - 32\pi)\ cm^2$.

Ejercicios propuestos

1. Una corona circular tiene un área de $A\ cm^2$ y uno de sus radios es el doble del otro. Hallar el valor de los radios en términos de A y π.

2.

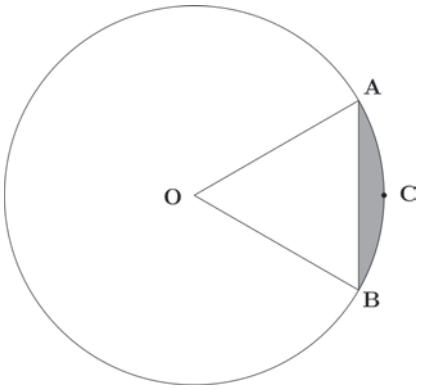


Figura 45.12

En la Figura 45.12, si
la circunferencia tiene centro en O
y radio r y el $\triangle BOA$ es equilátero
y su área es $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^2$,

(a) hallar el radio r de la circunferencia,
(b) hallar el área del segmento circular BCA.

3.

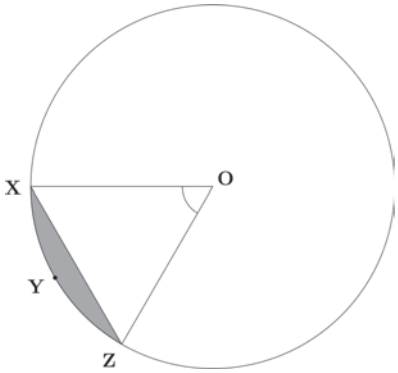


Figura 45.13

En la Figura 45.13, si
la circunferencia tiene centro en O
y radio $r = 6\ cm$ y $\angle XOZ = 60°$,
hallar el área del segmento circular XYZ.

Respuestas

1. $\sqrt{\dfrac{A}{3\pi}}\ cm$ y $2\sqrt{\dfrac{A}{3\pi}}\ cm$.
2. (a) $5\ cm$.
   (b) $\dfrac{25}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\ cm^2$.
3. $3\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\ cm^2$.

Bibliografía

[1] Álvarez C, Emiliano. *Elementos de geometría con numerosos ejercicios y geometría del compás. Segunda edición (Editorial Universidad de Medellín).* 2003.

[2] Arbeláez, Hugo; Baena, John; Bustamante, Eddye; Correa, Beatriz; López, Bibiana; Mejía, Jorge; Muñoz, Luz Elena; Osorio, Mauricio; Vélez, Carlos. *Precálculo (Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín).* 2013.

[3] Baldor, Aurelio. *Geometría y Trigonometría. Primera reimpresión (Grupo Editorial Patria).* 2009.

[4] Barnett, Rich *Teoría y problemas de Geometría Plana. (Mc.Graw Hill).* 1984.

[5] Bruño, G.M. *Geometría plana y del espacio. Clave para el maestro. (Bedout).*

[6] Clemens, Stanley R.; Cooney, Thomas J.; O´Daffer, Phares G. *Geometría (Addison Wesley Pearson Educación de México S.A. de C.V., México).* 1998.

[7] Grupo de estudio de la Matemática. *Geometría (Yale University Press).* 1963.

[8] Guerrero C, Ana B. *Geometría. Desarrollo axiomático. (ECOE Ediciones).* 2006.

[9] Landaverde, Felipe de Jesús. *Curso de Geometría. Segunda edición (Editorial Progreso S.A., México D.F.).* 1962.

[10] Londoño, Rodolfo; Valencia, Santiago. *Geometría Euclidiana (Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín).* 1986.

[11] Marques B, João. *Geometría euclideana plana. Reimpresión (Sociedade Brasileira de Matemática - SBM).* 1997.

[12] Miller, Charles D.; Heeren, Vern E.; Hornsby, John. *Matemática: razonamiento y aplicaciones (Addison Wesley Pearson Educación de México S.A. de C.V., México).* 2006.

[13] Minda, David. *Un intento por revitalizar la enseñanza de la geometría en Cincinnati, Ohio. Impreso en Medellín, Colombia.* 2009.

[14] Moise Downs. *Geometría Moderna (Fondo Educativo Interamericano, S.A.)* 1970.

[15] Prieto de C, Carlos. *MatemáticasICarlosPrieto2002.pdf. (México).* 2002.

[16] Reunion de Professeurs. *Cours de Géometrie, classes de* 2^{me} *et de* 1^{re}. *(Ligel).* 1956.

[17] Sánchez S, Manuel; *Geometría sin esfuerzo. (Playor).* 1983.

[18] Stewart, James; Redlin, Lothar; Watson, Saleem. *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Quinta edición (Thomson Editores).* 2007.

[19] Tejada J, Débora; Villegas, Celia. *Tópicos en geometría. (Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín).* 2006.

[20] Valencia, Santiago; Villegas, Celia. *Geometría Plana (Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín).* 1991.

[21] Viedma C, Juan A. *Lecciones de geometría intuitiva. (Norma, Cali).* 1970.

[22] *Tema 6 - Semejanza de triángulos.* [En línea] Disponible en World Wide Web: docencia.izt.uam.mx/sgpe/files/users/uami/mmac/Lectura5Semana4.pdf

Índice

Ángulo, 35
Ángulo agudo, 59
Ángulo central, 297
Ángulo congruente, construcción de, 44
Ángulo de un polígono, 217
Ángulo del vértice, 117
Ángulo exterior, 305
Ángulo exterior de un polígono, 217
Ángulo exterior de un triángulo, 101
Ángulo exterior de un triángulo, medida de, 109
Ángulo inscrito, 297
Ángulo interior, 305
Ángulo interior de un polígono, 217
Ángulo llano, 36, 59
Ángulo nulo, 36
Ángulo obtuso, 59
Ángulo recto, 59
Ángulo, bisectriz de un, 46
Ángulo, complemento de un, 65
Ángulo, lados de un, 35
Ángulo, suplemento de un, 65
Ángulo, vértice de un, 35
Ángulos adyacentes, 71
Ángulos alternos externos, 89
Ángulos alternos internos, 89
Ángulos complementarios, 65
Ángulos consecutivos, 71
Ángulos consecutivos de un polígono, 217
Ángulos correspondientes, 89
Ángulos correspondientes de triángulos semejantes., 179
Ángulos de un paralelogramo, 227
Ángulos en la circunferencia, 297
Ángulos exteriores, 89
Ángulos interiores, 89
Ángulos interiores de un triángulo, 101
Ángulos internos, 89
Ángulos opuestos de un polígono, 217
Ángulos opuestos por el vértice, 71
Ángulos suplementarios, 65
Ángulos, congruencia de, 43
Ángulos, medida de, 35
Ángulos, operaciones con, 51
Ángulos, resta de, 52
Ángulos, suma de, 51
Área, 257
Área de un círculo, 324
Área de un cuadrado, 260
Área de un paralelogramo, 261
Área de un polígono, 257
Área de un rectángulo, 259
Área de un rombo, 267
Área de un trapecio, 268
Área de un triángulo, 265
Área de un triángulo equilátero, 282
Área, unidad de, 258

Algunas aplicaciones del Teorema de Pitágoras, 279, 285
Altura, 149
Altura de un paralelogramo, 226
Altura de un trapecio, 249
Altura de un triángulo isósceles, 280
Apotema de un polígono, 323
Arco, 292, 297
Arco intersecado por un ángulo, 297
Arco subtendido por una cuerda, 292
Arco, medida en grados de un, 297
Arcos congruentes, 297
Axioma, 1

Baricentro, 157
Base, 101
Base de un paralelogramo, 226
Base de un triángulo isósceles, 117
Bases de un trapecio, 249
Bisectrices ángulos adyacentes, 80
Bisectrices ángulos opuestos por el vértice, 74
Bisectriz, 159
Bisectriz de un ángulo, 46
Bisectriz, construcción de, 46

Círculo, 323
Círculo, área de un, 324
Cateto, 119
Centro de una circunferencia, 291
Circuncentro, 151, 314
Circunferencia, 36, 291
Circunferencia circunscrita, 152
Circunferencia inscrita, 160
Circunferencia que pasa por tres puntos, construcción de, 315
Circunferencia, ángulos de, 297
Circunferencia, centro de una, 291
Circunferencia, cuerda de una, 291
Circunferencia, diámetro de una, 291
Circunferencia, longitud de una, 322
Circunferencia, punto exterior a la, 292
Circunferencia, punto interior a la, 292
Circunferencia, radio de una, 291
Circunferencia, recta exterior a una, 291
Circunferencia, recta secante a una, 291
Circunferencia, recta tangente a una, 291
Circunferencias concéntricas, 309
Circunferencias exteriores, 309
Circunferencias interiores, 309
Circunferencias secantes, 310
Circunferencias tangentes exteriormente, 310
Circunferencias tangentes interiormente, 309
Clasificación de ángulos, 59
Clasificación de triángulos, 117
Compás, 1, 15
Complemento de un ángulo, 65
Congruencia de ángulos, 43
Congruencia de segmentos, 11
Congruencia de segmentos entre paralelas, 166
Congruencia de triángulos, 133
Congruencia de triángulos rectángulos, 136, 143
Congruencia de triángulos, primer criterio de, 134
Congruencia de triángulos, segundo criterio de, 141
Congruencia de triángulos, tercer criterio de, 144
Consecutivos, ángulos, 71
Construcción ángulo congruente, 44
Construcción bisectriz, 46
Construcción de un paralelogramo, 237
Construcción división de un segmento en segmentos congruentes, 167
Construcción geométrica, 15
Construcción mediatriz, 82
Construcción paralela por punto exterior, 96
Construcción perpendicular a una recta, 83
Construcción punto medio de un segmento, 15
Construcción triángulo, 125
Construcción, circunferencia que pasa por tres puntos no colineales, 315
Construcciones geométricas, 15
Coplanares, puntos, 30
Coplanares, rectas, 31
Coplanares, semirrectas, 31
Corolario, 89
Corona circular, 333
Criterio de congruencia ángulo, ángulo, lado, 141
Criterio de congruencia ángulo, lado, ángulo, 141
Criterio de congruencia A-A-L, 141
Criterio de congruencia A-L-A, 141
Criterio de congruencia L-A-L, 134
Criterio de congruencia L-L-L, 144
Criterio de congruencia lado, ángulo, lado, 134
Criterio de congruencia lado, lado, lado, 144
Criterio de semejanza ángulo-ángulo, 180
Criterio de semejanza ángulo-ángulo-ángulo, 180
Criterio de semejanza A-A, 180
Criterio de semejanza A-A-A, 180
Criterio de semejanza L-A-L, 187
Criterio de semejanza L-L-L, 189
Criterio de semejanza lado-ángulo-lado, 187
Criterio de semejanza lado-lado-lado, 189
Criterios de semejanza de triángulos, 180
Cuadrado, 220, 241
Cuadrado circunscrito, 319
Cuadrado inscrito, 319
Cuadrado, área de un, 260
Cuadrado, diagonal de un, 280
Cuadrado, diagonales de un, 242
Cuadrado, perímetro de un, 260

Cuadrilátero, 225
Cuadrilátero inscribible en una circunferencia, 315
Cuerda de una circunferencia, 291

Diámetro, 291
Diagonal de un cuadrado, 280
Diagonal de un polígono, 217
Diagonal de un rectángulo, 279
Diagonales de un cuadrado, 242
Diagonales de un paralelogramo, 233
Diagonales de un rectángulo, 242
Diagonales de un rombo, 244
Dimensiones del rectángulo, 241
Distancia de un punto a una recta, 80
Distancia entre dos puntos, 12

Elementos de un triángulo, 125
Equiángulo, polígono, 220
Equilátero, polígono, 214
Escuadra, 1
Extremo de un segmento, 8
Extremo de una semirrecta, 7

Figuras, semejanza de, 179

Grado, 35

Hexágono inscrito, 319
Hipotenusa, 119

Ilustración gráfica Teorema de Pitágoras, 273
Incentro, 159, 314

Línea, 2
Línea curva, 2
Línea recta, 2
Lado de un polígono, 211
Lados consecutivos de un polígono, 214
Lados correspondientes de triángulos semejantes, 179
Lados de un ángulo, 35
Lados de un paralelogramo, 226
Lados de un triángulo, 101
Linea poligonal, 209
Longitud de una circunferencia, 322

Mediana, 157
Mediatriz, 151
Mediatriz de un segmento, 81
Mediatriz, construcción de, 82
Medida de ángulo exterior de un triángulo, 109
Medida de ángulos, 35
Medida de segmentos, 8
Medida de un ángulo central, 297
Medida de un ángulo inscrito, 298
Medida en grados de un arco, 297
Minuto, 36

Nonágono, suma de ángulos interiores de un, 220

Octágono, suma de ángulos interiores de un, 220
Operaciones con ángulos, 51
Operaciones con segmentos de una misma recta, 17
Origen de una semirrecta, 7
Ortocentro, 149

Paralela por punto exterior, construcción de, 96
Paralelogramo, 225
Paralelogramo, ángulos de un, 227
Paralelogramo, área de un, 261
Paralelogramo, altura de un, 226
Paralelogramo, base de un, 226
Paralelogramo, construcción de, 237
Paralelogramo, diagonales de un, 233
Paralelogramo, lados de un, 226
Paralelogramo, perímetro de un, 261
Paralelogramos especiales, 241
Perímetro de un cuadrado, 260
Perímetro de un paralelogramo, 261
Perímetro de un polígono, 257
Perímetro de un rectángulo, 259
Perímetro de un rombo, 267
Perímetro de un trapecio, 268
Perímetro de un triángulo, 265
Perpendicular a una recta, construcción de, 83
Pie de las perpendiculares, 79
Pitágoras, Teorema de, 271
Plano, 2, 3, 29
Planos, posiciones relativas de dos, 31

Polígono, 211
Polígono cóncavo, 211
Polígono circunscrito, 313
Polígono convexo, 211
Polígono convexo, suma de ángulos exteriores de un, 220
Polígono convexo, suma de ángulos interiores de un, 219
Polígono equiángulo, 220
Polígono equilátero, 214
Polígono inscrito, 313
Polígono regular, 220
Polígono, ángulo de un, 217
Polígono, ángulo exterior de un, 217
Polígono, ángulo interior de un, 217
Polígono, ángulos consecutivos de un, 217
Polígono, ángulos opuestos de un, 217
Polígono, área de un, 257
Polígono, apotema de un, 323
Polígono, diagonal de un, 217
Polígono, lado de un, 211
Polígono, lados consecutivos de un, 214
Polígono, perímetro de un, 257
Polígono, vértice de un, 211
Polígono, vértices consecutivos de un, 214
Polígono, vértices opuestos de un, 214
Polígonos circunscribibles, 318
Polígonos inscribibles, 317
Polígonos según número de lados, 212
Poligonal, 209
Poligonal abierta, 209
Poligonal cóncava, 210
Poligonal cerrada, 209
Poligonal convexa, 209
Poligonal, línea, 209
Poligonal, lado de una, 209
Poligonal, vértice de una, 209
Posiciones relativas de dos planos, 31
Posiciones relativas de una recta y un plano, 32
Postulado, 1
Primer criterio de congruencia de triángulos, 134
Problemas de aplicación de semejanza de triángulos, 193, 201
Producto de un ángulo por un número real positivo, 53
Producto de un segmento por un número real positivo, 20
Propiedades de las proporciones, 168
Proporción, 168
Proporcionalidad de segmentos, 168
Proporcionalidad, teorema fundamental de la, 173
Proporciones, propiedades de, 168
Punto, 2
Punto de tangencia, 291
Punto exterior a la circunferencia, 292
Punto interior a la circunferencia, 292
Punto medio de un segmento, 15
Punto medio de un segmento, construcción de, 15
Puntos colineales, 4
Puntos coplanares, 30

Quinto postulado, 87

Radio de una circunferencia, 36, 291
Rayo, 7
Razón, 168
Rectángulo, 241
Rectángulo, área de un, 259
Rectángulo, diagonal de un, 279
Rectángulo, diagonales de un, 242
Rectángulo, dimensiones del, 241
Rectángulo, perímetro de un, 259
Recta exterior a una circunferencia, 291
Recta secante, 89
Recta secante a una circunferencia, 291
Recta tangente a una circunferencia, 291
Recta transversal, 89
Recta y plano, posiciones relativas de, 32
Rectas coplanares, 31
Rectas en el triángulo, 149, 157
Rectas paralelas, 87
Rectas perpendiculares, 79
Regla graduada, 1
Resta de ángulos, 52
Resta de segmentos, 19
Rombo, 241
Rombo, área de un, 267
Rombo, diagonales de un, 244

Rombo, perímetro de un, 267

Secante, recta, 89
Sector Circular, 329
Segmento, 8
Segmento Circular, 330
Segmento de recta, 8
Segmento, extremo de un, 8
Segmento, mediatriz de un, 81
Segmento, medida de, 8
Segmento, punto medio de un, 15
Segmentos congruentes, división de un segmento en, 167
Segmentos entre paralelas, congruencia de, 166
Segmentos proporcionales, 171
Segmentos, congruencia de, 11
Segmentos, operaciones con, 17
Segmentos, proporcionalidad de, 168
Segmentos, resta de, 19
Segmentos, suma de, 17
Segundo, 36
Semejanza de figuras, 179
Semejanza de triángulos, 179
Semejanza de triángulos rectángulos, 181, 188
Semejanza de triángulos, criterios de, 180
Semejanza de triángulos, problemas de aplicación, 193, 201
Semicírculo, 331
Semicircunferencia, 297
Semiplano, 29
Semirrecta, 7
Semirrectas coplanares, 31
Sistema métrico decimal, 8
Sistema sexagesimal, 35
Suma de ángulos, 51
Suma de ángulos exteriores de un polígono convexo, 220
Suma de ángulos interiores de un nonágono, 220
Suma de ángulos interiores de un octágono, 220
Suma de ángulos interiores de un polígono convexo, 219
Suma de segmentos, 17
Suplemento de un ángulo, 65

Tales, Teorema de, 171, 182
Tangencia, punto de, 291
Tangentes exteriores, 310
Tangentes interiores, 309
Teorema, 1
Teorema de Pitágoras, 271
Teorema de Pitágoras, algunas aplicaciones, 279, 285
Teorema de Pitágoras, ilustración gráfica, 273
Teorema de Tales, 171, 182
Teorema fundamental de la proporcionalidad, 173
Transportador, 1, 36
Trapecio, 225, 249
Trapecio isósceles, 249
Trapecio isósceles, ángulos de un, 254
Trapecio isósceles, diagonales de un, 255
Trapecio rectángulo, 249
Trapecio, área de un, 268
Trapecio, altura de un, 249
Trapecio, base mayor de un, 249
Trapecio, base menor de un, 249
Trapecio, bases de un, 249
Trapecio, perímetro de un, 268
Triángulo, 101
Triángulo acutángulo, 118
Triángulo equiángulo, 118
Triángulo equilátero, 117
Triángulo equilátero, área de un, 282
Triángulo escaleno, 117
Triángulo isósceles, 117
Triángulo isósceles, altura de un, 280
Triángulo isósceles, base de un, 117
Triángulo obtusángulo, 118
Triángulo rectángulo, 118
Triángulo, ángulo exterior de un, 101
Triángulo, ángulos interiores de un, 101
Triángulo, área de un, 265
Triángulo, altura de un, 149
Triángulo, baricentro de un, 157
Triángulo, bisectriz de un, 159
Triángulo, circuncentro de un, 151
Triángulo, construcción de un, 125
Triángulo, elementos correspondientes de un, 133
Triángulo, elementos de un, 125
Triángulo, incentro de un, 159

Triángulo, lados de un, 101
Triángulo, mediana de un, 157
Triángulo, mediatriz de un, 151
Triángulo, ortocentro de un, 149
Triángulo, perímetro de un, 265
Triángulo, vértices de un, 101
Triángulos congruentes, 133
Triángulos rectángulos, semejanza de, 181
Triángulos, congruencia de, 133
Triángulos, semejanza de, 179

Unidad cuadrada, 258
Unidad de área, 258

Vértice de un ángulo, 35
Vértice de un polígono, 211
Vértice de una poligonal, 209
Vértice, ángulo del, 117
Vértices consecutivos de un polígono, 214
Vértices de un triángulo, 101
Vértices opuestos de un polígono, 214

Red Matemática Antioquia

Antioquia la más educada

Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las matemáticas en Antioquia

2012 - 2015

facebook.com/RedMatematicaAntioquia
@redmatematicant
redmatematica@antioquia.gov.co